

# Límites de funciones. Tipos de indeterminaciones

## Límites y operaciones

Estudiar el límite de una función en un punto es ver "a que tiende" esa función en ese punto "x". Notación  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  límite cuando x tiende a  $\infty$  de f(x) es igual a b.

Los valores de x pueden ser finitos o infinitos. Los que toma la función también.

Para calcular un límite debemos sustituir el valor de x por el valor que me diga el límite.

Podemos obtener solución o una indeterminación que hay que resolver.

## Operaciones de números (los representamos por k) y $\pm \infty$ . Regla de los signos.

Comparar un número (por muy grande o muy pequeño que sea) con el  $+\infty$  o el  $-\infty$ , es como comparar una gota de agua (el número) con el mar (el infinito).

Se supone que el infinito es lo más grande o lo más pequeño que hay pero nunca podemos alcanzarlo. En realidad el infinito se ha establecido para poder poner fin.

### Suma y resta $\Rightarrow k \pm \infty = \pm \infty$

a)  $8 + \infty = \infty$    b)  $-20 - \infty = -\infty$    c)  $8 - (+\infty) = 8 - \infty = -\infty$    d)  $-\infty + 5 = -\infty$    e)  $\infty - 10^6 = \infty$

### Producto $\Rightarrow k (\neq 0) \cdot \pm \infty = \pm \infty$

a)  $5 \cdot \infty = \infty$    b)  $-3 \cdot (-\infty) = \infty$    c)  $1000 \cdot \infty = \infty$    d)  $-\infty \cdot (-8) = \infty$    e)  $\infty \cdot (-5) = -\infty$

**Cociente**  $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pm \infty}{k} = \pm \infty \\ \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases}$

a)  $\frac{\infty}{5} = \infty$    b)  $\frac{\infty}{-10} = -\infty$    c)  $\frac{-\infty}{5000} = -\infty$    d)  $\frac{-\infty}{-0,0001} = \infty$

a)  $\frac{10^6}{\infty} = 0$    b)  $\frac{-0,00005}{-\infty} = 0$    c)  $\frac{10^6}{-\infty} = 0$

**Potencia**  $\Rightarrow \begin{cases} (\pm \infty)^k \Rightarrow & \text{a) } (\pm \infty)^2 = \infty \quad \text{b) } \infty^3 = \infty \quad \text{c) } (-\infty)^3 = -\infty \\ k^{(\pm \infty)} \Rightarrow & \begin{cases} k > 1 \Rightarrow & \text{a) } 2^{\infty} = \infty \quad \text{b) } 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ 0 < k < 1 \Rightarrow & \text{a) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty \end{cases} \end{cases}$

## Tipos de indeterminaciones teniendo en cuenta a que tiende x

**Límite cuando  $x$  tiende a  $\pm \infty$ . Posibilidades :**

a) Obtenemos solución directamente.

b) Indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$

c) Indeterminación  $\infty - \infty$

d) Indeterminación  $1^\infty$

**Límite de una función en un punto. Posibilidades :**

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación  $\frac{0}{0}$ . Tipos  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raíces: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación  $\frac{k}{0}$  Límites laterales, solución  $\pm \infty$ . Asíntotas verticales.

d) Funciones definidas "a trozos" . Límites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

## Límites cuando $x \rightarrow \pm \infty$

### a) Límites que nos dan solución directa.

Nos quedamos con el término de mayor grado.

Debemos poner el límite hasta que obtengamos el resultado final.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3(\infty)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \infty = -\infty$$

b) **Indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$**   $\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sustituimos } x \text{ por } \infty \text{ para ver que indeterminación es.} \\ \text{Nos quedamos con los términos de mayor grado.} \\ \text{Al resolver nos pueden aparecer 3 casos.} \end{array} \right.$

### Casos

#### 1. Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, nos da $+\infty$ o $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Debemos comprobar el tipo de indeterminación} \\ 2^\circ \text{ Resolvemos} \end{array} \right.$$

$$1^\circ \text{ Sustituimos } x \text{ por } \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ INDETERMINACIÓN}$$

$$2^\circ \text{ Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = +\infty$$

#### 2. Cuando son del mismo grado. La solución es el cociente de los coeficientes del mismo grado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \text{ Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

#### 3. Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

La solución es cero.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \text{ Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

### c) **Indeterminación $\infty - \infty$**

Se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la raíz. Utilizamos la igualdad notable

**suma por diferencia** para conseguir quitar la raíz.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x$$

1º Sustituimos  $x$  por  $\infty$  y nos da la indeterminación  $\infty - \infty$ .

2º Resolvemos: nos dan  $(a - b)$   $\frac{\sqrt{x+1} - x}{a - b}$  el conjugado será  $(a + b)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x+1} + x} =$$

## Límite de una función en un punto

### Posibilidades

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación  $\frac{0}{0}$ . Tipos  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raíces: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación  $\frac{k}{0}$  Límites laterales, solución  $\pm \infty$ . **Asíntotas verticales.**

d) Funciones definidas "a trozos". Límites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

a) **Obtener solución directamente.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$$

b) **Indeterminación  $\frac{0}{0}$**

**Funciones racionales con polinomios:** descomponemos en factores y simplificamos.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6}{x+5} = \frac{-2}{7}$$

**Funciones racionales con raíces:** multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{x(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

## Ejercicios de límites resueltos

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \cdot \infty = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 - x+2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1+3x]^{2/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} [(1+3x) - 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3x}{x}} = e^6$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-3} = \frac{10}{-1} = -10$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

## Ejercicios con soluciones

1. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x^6 - x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$$

2. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^3 - 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{2+2x-x^2}{x^2-2x} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x^2 - 4} \right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3-x}{2+x} \right)^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2+x} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+5)(5x+2)}{-(x-3)^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 - \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}$$

## Soluciones

1) a) 3/4 b) 5/3 c) 4 d) -1/2 e) -1 f)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  g) 4 h) 0 i) -2/3 j) 2

2) a)  $+\infty$  b) 3/2 c)  $+\infty$  d) 1 e)  $e^6$  f) e g) e h) -15 i) -1 j) 1 k) -1 l) 1 m)  $e^{-1}$

## Asíntotas verticales

### Características y pasos para calcular asíntotas verticales

1. Calculamos el dominio de la función.
2. Tomamos el límite, para los valores de  $x$  que no pertenecen al dominio. Si el límite nos dá infinito, en esos valores hay una asíntota vertical.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
3. Para saber a que tiende la función hay que tomar el o los límites laterales.

**La solución sólo puede ser  $\pm \infty$**

4. Son **rectas paralelas al eje OY**. Se escriben  $x = \text{valor de la asíntota vertical}$ .
5. Funciones que pueden tener asíntotas verticales :

**Funciones racionales :** **Indeterminación  $\frac{K}{0}$**

**Funciones logarítmicas y función tangente.**

6. El número máximo de asíntotas verticales que puede tener una función es dos.

### Ejemplos

1.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  figura 1

**Dominio**  $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

**Límite en  $x = 1$**   $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty$  **Indeterminación  $\frac{K}{0}$**  . Hay una **asíntota vertical en  $x = 1$** .

**Tomamos los límites laterales** para ver a que tiende la función por su izquierda y por su derecha. Sustituimos los valores de  $x$  por la izquierda (0,99) y por la derecha (1,1), sólo me interesa el signo que tome no los números, la única solución va a ser  $+\infty$  o  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0,99+1}{0,99-1} = \frac{+}{-} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1,1+1}{1,1-1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

La información de los límites laterales la usamos para representar la gráfica. Observa los límites laterales en  $x = 1$  de la figura 1.

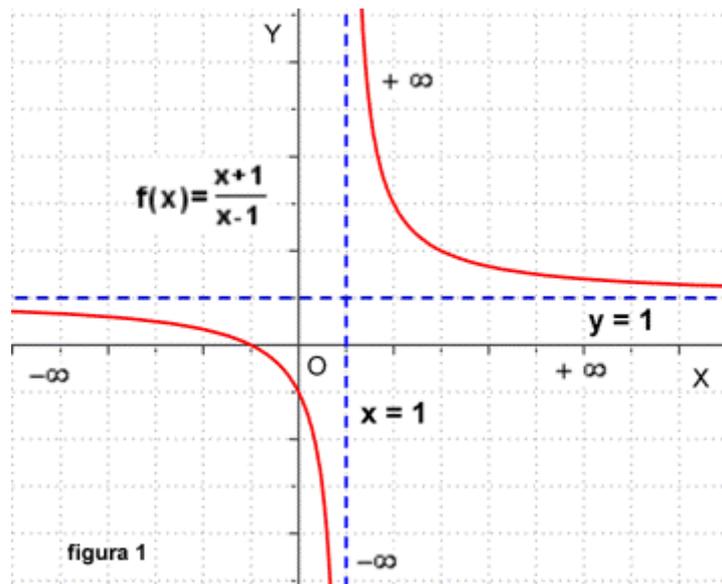
2.  $f(x) = \log x$

**Dominio**  $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

El 0 no está incluido, pero el 0,000000001 sí.

Tomamos el límite lateral en cero por la derecha para ver el signo.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log 0,000000001 = -8 = -\infty$$



◀ Visita esta actividad, para ver [la asíntota vertical y su límite lateral de una función logarítmica](#)

## Asíntotas horizontales

## Características y pasos para calcular asíntotas horizontales

Nos indican a que tiende la función cuando la  $x$  es muy grande o muy pequeña.

1. Calculamos el límite de la función cuando  $x$  tiende a infinito. **Si existe el límite(valor finito)**, el valor del límite es una asíntota horizontal.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  se escribe  $y = b$
2. Son rectas paralelas al eje OX. Se escriben  $y =$  valor de la asíntota horizontal.
3. **Las funciones racionales** tienen asíntota horizontal en estos casos :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ Cuando el numerador y el denominador son del mismo grado.} \\ 2. \text{ Cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.} \end{cases}$$

4. **Las funciones exponenciales** tienen una asíntota horizontal en  $y = 0$ .

## Ejemplos de funciones racionales

1.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  figura 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 1$$

\*\*\* Para saber si la función tiende a uno por arriba o por abajo damos valores "grande y pequeño" a  $x$ ,

$$x = 10 \Rightarrow f(10) = \frac{10+1}{10-1} = \frac{11}{9} = 1,22 \text{ la función se acerca a uno por arriba de la asíntota para } x \rightarrow +\infty$$

$$x = -10 \Rightarrow f(-10) = 0,81 \text{ la función se acerca a uno por abajo para } x \rightarrow -\infty$$

2.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hay una asíntota horizontal en  $y = 0$  que es la ecuación del eje OX.

◀ En esta actividad tienes una hipérbola donde puedes modificar los distintos valores y observar que pasa con las [asíntotas verticales y horizontales](#).

◀ Comprueba la [asíntota horizontal en  \$y = 0\$  de las funciones exponenciales](#) en esta actividad.

## Asíntotas oblicuas

## Funciones racionales y asíntotas oblicuas

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es **una unidad mayor** que el grado del denominador.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty & \text{Tiene asíntota oblicua} \\ f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x - 1} = +\infty & \text{No tiene. Tiene una rama parabólica.} \end{cases}$$

\*\*\* Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles. Si hay unas no puede haber otras.

### Cálculo de la ecuación de la recta de la asíntota oblicua

$$y = mx + n \Rightarrow m \neq 0 \quad \text{Debemos calcular} \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ pendiente: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] \\ 2. \text{ ordenada: } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

### Ejemplos

1.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  **figura 2**

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador tiene asíntota oblicua. Esto lo sabemos pero debemos escribir lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty \Rightarrow \text{Hay una asíntota oblicua. Calculamos su ecuación:}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

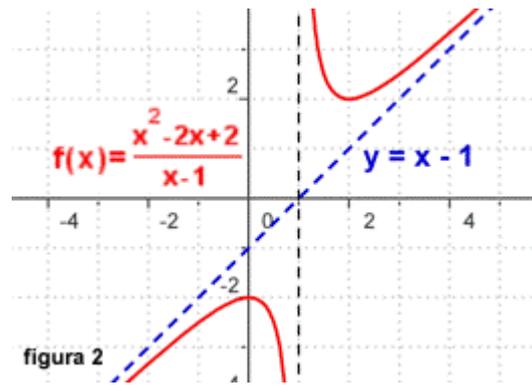
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Ecuación:  $y = mx + n \Rightarrow y = x - 1$  (para representarla damos valores)

### Otra forma para funciones racionales :

Dividimos  $P(x)$  entre  $Q(x)$ , el cociente es la ecuación de la asíntota. El resto no nos interesa.

$$2. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \end{array} \quad \text{La ecuación de la asíntota es: } y = x$$



## Continuidad de una función en un punto 7.2

Continuidad y tipos discontinuidad de una función en un punto

Una función  $f(x)$  es **continua en el punto  $x = a$**  si se cumplen las condiciones :

1. **Existe  $f(a)$** . El punto  $a$  debe pertenecer al dominio de la función
2. **Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$** . En funciones definidas "a trozos"  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
3.  **$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$** . En funciones definidas "a trozos"  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones la función es discontinua en ese punto.

Ver las condición o condiciones que no se cumplen en los distintos **tipos de discontinuidad**.  
 "Si podemos dibujar la función sin levantar el lápiz del papel es continua. Si no, es discontinua."

### Tipos de discontinuidad de una función en un punto

- Evitable**  $\Rightarrow$  1.  $\exists f(a) \text{ o } \nexists f(a)$       2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$       3.  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- De salto finito**  $\Rightarrow$  1.  $\exists f(a)$       2.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- De salto infinito**  $\Rightarrow$  1.  $\nexists f(a)$  (**Asíntotas verticales**)

### Ejemplos

1. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \frac{5x}{x-5}$  en los puntos  $x = 2$  y  $x = 5$ . figura 1

**Continuidad de la función en  $x = 2 \Rightarrow$  Ejemplo de función continua en un punto.**

1.  $\exists f(a) \Rightarrow$ 

$$\begin{cases} \text{Calculamos el dominio de } f(x) \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{5\} \\ \text{El valor } x = 2 \text{ forma parte del dominio entonces } \exists f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{5 \cdot 2}{2-5} = -\frac{10}{3} \end{cases}$$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-5} = -\frac{10}{3}$
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow -\frac{10}{3} = -\frac{10}{3}$

Vemos que se cumplen las 3 condiciones luego la función es continua en  $x = 2$ .

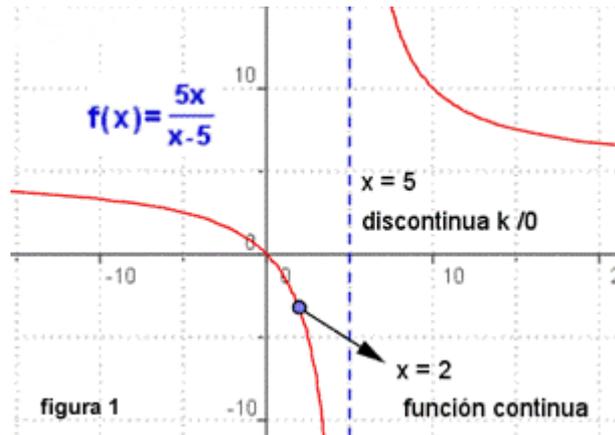
**Continuidad de la función en  $x = 5 \Rightarrow$  Ejemplo de discontinuidad de salto infinito.**

1.  $\exists f(a) \Rightarrow$  El valor  $x = 5$  no forma parte del dominio luego **no existe  $f(5)$** . Discontinua.

Si calculamos el límite  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x}{x-5} = \frac{25}{0} = \frac{k}{0}$  **Indeterminación. Asíntota vertical.**

La función en  $x = 5$  tiene una discontinuidad de salto infinito.

\*\*\* Las funciones racionales tendrán una discontinuidad de salto infinito en aquellos valores de  $x$  donde no estén definidas.



## Discontinuidad evitable

2. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  figura 2

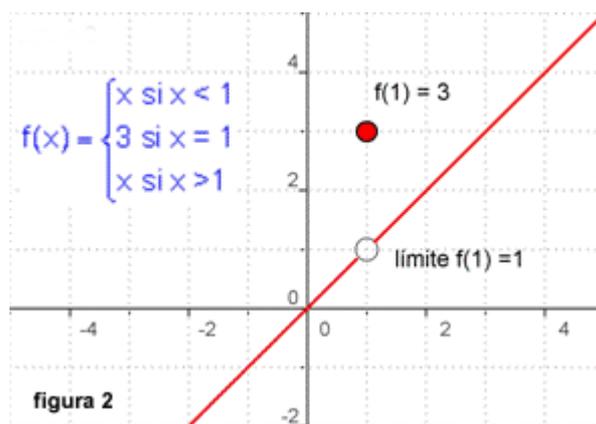
1.  $\exists f(a) \Rightarrow f(1) = 3$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} x = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Rightarrow 1 \neq 3$

El valor de la función no coincide con el valor del límite.

En  $x = 1$  La imagen vale 3 y el límite vale 1. Discontinuidad evitable.



## Discontinuidad de salto finito

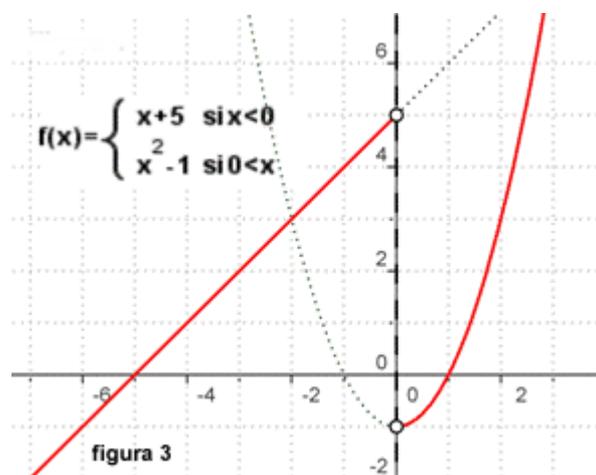
3. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  **figura 3**

1.  $\exists f(a) \Rightarrow f(0)$  **no existe**, el valor  $x = 0$  no está incluido ni por la izquierda ni por la derecha.  
La función es discontinua en  $x = 0$ , coincidan o no los límites laterales.

2. Calculamos los límites laterales en el punto frontera. En este caso en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 5 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} = -1$$

No coinciden. Por tanto no existe límite. **Discontinuidad de salto finito** de 6 unidades.



## Ejercicios de continuidad y discontinuidad 7.3

### Ejercicios resueltos

**1. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  en  $x = 1$**

1.  $\exists f(a)$

Calculamos el dominio de  $f(x) \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$  función discontinua en  $x = 1$   $\cancel{f(1)}$

2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{0}{0}$  indeterminación. **Discontinuidad evitable.**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ . Existe el límite de la función en  $x = 1$  y vale 1.

3. **Discontinuidad evitable en  $x = 1$ , la función no tiene imagen en  $x = 1$  pero si tiene límite.**

**2. Calcular el valor de  $a$  para que la siguiente función sea continua:  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$**

1.  $f(1) = x + 1 = 2$

2. Calculamos los límites laterales  $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 - ax^2 = 3 - a \end{cases} \Rightarrow 2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$

3. Si  $a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} = \lim_{x \rightarrow 1^+} = f(1) = 2 \Rightarrow$  **La función es continua en  $x = 1$**

**3. Calcular el valor de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua :**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Continuidad en  $x = 0$**

Límites laterales en  $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b \end{cases} \Rightarrow b = -1$

**Continuidad en  $x = 1$**

Límites laterales en  $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

**Si  $a = 3$  y  $b = -1$  la función es continua.**

**4. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  y representarla.**

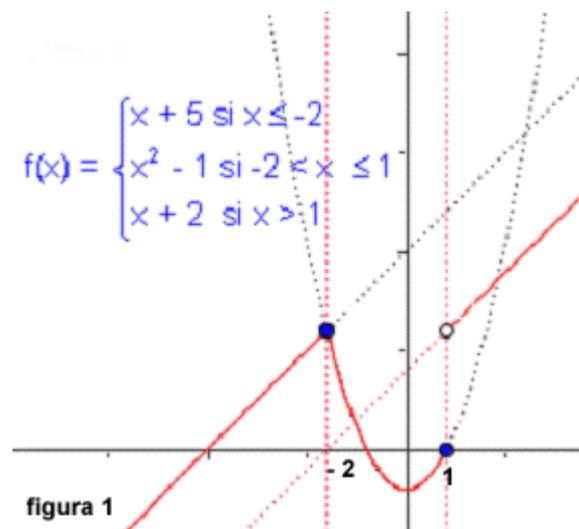
**Continuidad en  $x = -2$**

1.  $\exists f(a) \Rightarrow f(-2) = x + 5 = 3 \Rightarrow$  Existe  $f(-2)$

2. Límites laterales  $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} x + 5 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 - 1 = 3 \end{cases}$  Existe límite en  $x = -2$  y vale 3

3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} = \lim_{x \rightarrow -2^+} = f(-2) = 3$

Se cumplen las 3 condiciones y por lo tanto la función es continua en  $x = -2$



## Ejercicios con soluciones

1. Representar la siguiente función y razonar si es continua en los puntos que se indican:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } 0, 2 \text{ y } 3$$

2. Decir en qué conjunto son continuas cada una de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5 \quad b) g(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad c) h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -4/3 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1 \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

4. Estudiar si existe algún valor de k que haga que las siguientes funciones sean continuas:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{kx^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{(x+k)(x-2)}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 3 & x \geq 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & x > 3 \\ 3x & x \leq 3 \end{cases}$$

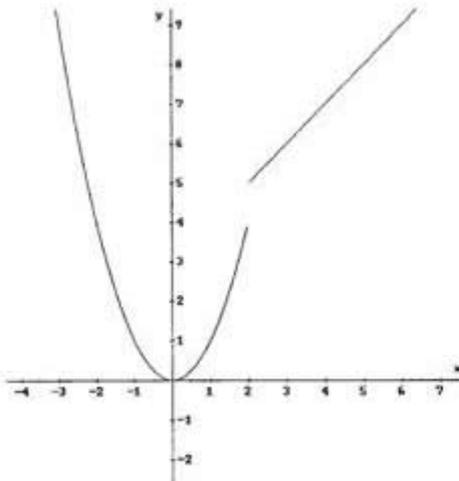
$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -4/3 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad d) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 5, & \text{si } 3 < x < 4 \\ 0, & \text{si } x = 4 \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ x^2 - 1 & 1 < x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x > 3 \\ 2 & 3 > x \geq 1 \\ x^2 + x & 0 < x < 1 \\ x & 0 > x \end{cases} \quad h) f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 0 \\ x^2 + 2 & 0 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

## Soluciones

1)



En 0 y 3  $f$  es continua, en 2 es discontinua con salto finito: los límites laterales son finitos y distintos.

- 2) a)  $f$  es continua en todos los números reales por ser un polinomio.  
b)  $g$  es continua en todos los números reales menos  $-4$  y  $1$ .  
c)  $h$  es continua en  $(-1/3, +\infty)$
- 3) a)  $f$  es continua en  $x = -1$ , b)  $g$  no es continua en  $x = 2$  porque no hay límite de  $g$  en dicho punto
- 4) a)  $f$  es continua para cualquier valor de  $k$       b)  $k = -8$ .
- 5) a)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\mathbb{R} = \{\text{números reales}\}$ , en  $x = 0$  tiene una discontinuidad con salto finito.  
b)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{3\}$ , en  $x = 3$  tiene una discontinuidad con salto infinito.  
c)  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .  
d)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$ , en  $x = 2$  tiene una discontinuidad con salto finito.  
e)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{3, 4\}$ , en  $x = 3$  tiene una discontinuidad evitable, en  $x = 4$  tiene una discontinuidad con salto finito.  
f)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$ , en  $x = 2$  tiene una discontinuidad con salto finito.  
g)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ , en  $x = 3$  tiene una discontinuidad con salto finito y en  $x = 0$  tiene una discontinuidad evitable.  
h)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ , en  $x = 2$  tiene una discontinuidad inevitable, con los límites laterales iguales y en  $x = 0$  una discontinuidad evitable.