

PROBLEMAS SOLUCIONADOS SOBRE RADICALES.

1º) Ordena de menor a mayor los siguientes radicales, reduciéndolos a índice común:

$$\sqrt[3]{16}, \sqrt[8]{5^7}, \sqrt{3}.$$

Solución: Reduzcamos los radicales a índice común, para ellos expresémoslos como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[3]{16}, \sqrt[8]{5^7}, \sqrt{3} \Rightarrow 16^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{7}{8}}, 3^{\frac{1}{2}}.$$

Como sabemos, el índice de un radical es el denominador de la fracción del exponente. Así, si queremos reducir los radicales al mismo índice (reducción a índice común), tendremos que hallar fracciones equivalentes de los exponentes con el mismo denominador, pues, insisto, el denominador de un exponente es el índice del radical.

$$\text{Así, } 16^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{7}{8}}, 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 16^{\frac{8}{24}}, 5^{\frac{21}{24}}, 3^{\frac{12}{24}} \Rightarrow \sqrt[24]{16^8}, \sqrt[24]{5^{21}}, \sqrt[24]{3^{12}} \Rightarrow \sqrt[24]{4294967296}, \sqrt[24]{476837158203125}, \sqrt[24]{531441}$$

Así, como tienen igual índice, el menor de esos radicales es el que menor radicando tenga, es decir,

$$\sqrt[24]{531441} < \sqrt[24]{4294967296} < \sqrt[24]{476837158203125}.$$

Pero, esos radicales no eran los que nos pedían ordenar, sino éstos $\sqrt[3]{16}, \sqrt[8]{5^7}, \sqrt{3}$.

Luego:

$$\sqrt[24]{531441} = \sqrt{3} < \sqrt[24]{4294967296} = \sqrt[3]{16} < \sqrt[24]{476837158203125} = \sqrt[8]{5^7},$$

y, por tanto, $\sqrt{3} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[8]{5^7}$.

2º) Realizar las siguientes sumas de radicales:

a) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{32}$

Solución: Ya sabemos que las únicas operaciones con radicales son multiplicar o dividir radicales que tengan el mismo índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$. No se pueden sumar o restar radicales, salvo que, al extraer factores fuera resulte el mismo radical, y al igual que $x+2x=3x$, pues $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$, por ejemplo. Así, $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{32}$ tal y cómo están no se pueden sumar. Saquemos, pues, factores fuera de los radicales, a ver si tenemos el mismo radical o uno equivalente (por ejemplo $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[12]{3^6} = \dots$)

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{32} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^2 \cdot 2} + 7\sqrt{2^4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 5 \cdot 2^{\frac{2}{2}} \sqrt{2} + 7 \cdot 2^{\frac{4}{2}} \sqrt{2} = \\ 3\sqrt{2} - 5 \cdot 2\sqrt{2} + 7 \cdot 4\sqrt{2} &= 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 28\sqrt{2} = (3 - 10 + 28)\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) $5\sqrt{48} - \sqrt{\frac{3}{64}}$

Solución:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{48} - \sqrt{\frac{3}{64}} &= 5\sqrt{2^4 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{64}} = 5 \cdot 2^{\frac{4}{2}} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} = 5 \cdot 2^2 \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} = 20\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \\ \left(20 - \frac{1}{8}\right)\sqrt{3} &= \frac{160-1}{8}\sqrt{3} = \frac{159}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$c) \sqrt{\frac{8}{27}} + \sqrt{\frac{32}{75}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2}}{\sqrt{3^2 \cdot 3}} + \frac{\sqrt{2^4 \cdot 2}}{\sqrt{3 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{2^2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{15} + \frac{12}{15}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{22}{15} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nota: Si se quiere, también se puede poner la solución como

$$\frac{22}{15} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{22}{15} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{22\sqrt{2}}{15\sqrt{3}} = \frac{22\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{15\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{22\sqrt{2 \cdot 3}}{15 \cdot 3} = \frac{22\sqrt{6}}{45}$$

3º) Simplificar las expresiones:

$$a) \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}-1}}$$

$$b) \frac{\sqrt{27}-2\sqrt{3}+5\sqrt{9}}{-15-\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}}{3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}}$$

Solución: a)

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}-1}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{7}+1) \cdot (2\sqrt{7}+1)}{(2\sqrt{7}-1) \cdot (2\sqrt{7}+1)}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{7}+1)^2}{(2\sqrt{7})^2 - 1^2}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{7}+1)^2}{(2\sqrt{7}) \cdot (2\sqrt{7}) - 1}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{7}+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - 1}} =$$

$$\frac{\sqrt{(2\sqrt{7}+1)^2}}{\sqrt{4 \cdot 7 - 1}} = \frac{|2\sqrt{7}+1|}{\sqrt{27}} = \frac{2\sqrt{7}+1}{\sqrt{3^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{7}+1}{3\sqrt{3}}$$

Racionalizando la última expresión

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}-1}} = \frac{2\sqrt{7}+1}{3\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{7}+1) \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{21} + \sqrt{3}}{9}$$

* Téngase en cuenta que $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$b) \frac{\sqrt{27}-2\sqrt{3}+5\sqrt{9}}{-15-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{27}-2\sqrt{3}+5\sqrt{9}) \cdot (-15+\sqrt{3})}{(-15-\sqrt{3}) \cdot (-15+\sqrt{3})} = \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+5 \cdot 3) \cdot (-15+\sqrt{3})}{(-15)^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+15) \cdot (-15+\sqrt{3})}{(-15)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(\sqrt{3}+15) \cdot (\sqrt{3}-15)}{225-3} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 15^2}{222} = \frac{3-225}{222} = \frac{-222}{222} = -1$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{16}}{3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}} = \frac{\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}-3\sqrt[3]{3^3 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-5 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}-3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[3]{2}-9\sqrt[3]{2}} = \frac{-9\sqrt[3]{2}}{-3\sqrt[3]{2}} = \frac{-9}{-3} = -3$$

4º) Racionalizar:

$$a) \frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}, b) \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}-1}, c) \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, d) \frac{5}{1-\sqrt{3}}, e) \frac{7}{\sqrt{5}+4}, f) \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+1}, g) \frac{2}{\sqrt{5}}, h) \frac{2}{\sqrt[3]{7}},$$

$$i) \frac{1}{\sqrt{2}-1}, j) \frac{1}{\sqrt[4]{5}-2}, k) \frac{8}{\sqrt{2}-5+\sqrt{3}}, l) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$$

Solución:

a)

$$\frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5})}{(\sqrt{15} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5})}{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5})}{15 - 5} = \frac{2 \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5})}{10} =$$

$$\frac{2}{10} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5}) = \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{5}$$

b)

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} \cdot 1}{4} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} + \sqrt[3]{5}}{4} = \frac{\sqrt[6]{5^2 \cdot 5^3} + \sqrt[3]{5}}{4} = \frac{\sqrt[6]{5^5} + \sqrt[3]{5}}{4}$$

c)

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{1 - 2} = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2}{-1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{-1} =$$

$$\frac{(3 - 2\sqrt{2}) \cdot (-1)}{-1 \cdot (-1)} = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{1} = -3 + 2\sqrt{2}$$

d)

$$\frac{5}{1 - \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{-2} = \frac{(-1) \cdot 5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{(-1) \cdot (-2)} =$$

$$\frac{-5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{-5 \cdot 1 - 5 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{-5 - 5\sqrt{3}}{2}$$

e)

$$\frac{7}{\sqrt{5} + 4} = \frac{7 \cdot (\sqrt{5} - 4)}{(\sqrt{5})^2 - 4^2} = \frac{7 \cdot (\sqrt{5} - 4)}{5 - 16} = \frac{7 \cdot (\sqrt{5} - 4)}{-11} = \frac{-7 \cdot (\sqrt{5} - 4)}{11} = \frac{-7 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot 4}{11} =$$

$$\frac{-7\sqrt{5} + 28}{11}$$

f)

$$\frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(3 - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 1 - \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{7} \cdot 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{7 \cdot 2} + \sqrt{7}}{2 - 1} =$$

$$\frac{3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{14} + \sqrt{7}}{1} = 3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{14} + \sqrt{7} = -3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{14}$$

Observación: La igualdad $3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{14} + \sqrt{7} = -3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{14}$ es obvia y no es necesario ponerla. La he puesto para hacer coincidir esta solución $3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{14} + \sqrt{7}$ con la propuesta inicialmente $-3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{14}$.

g) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

h) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{2\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7 \cdot 7^2}} = \frac{2\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

$$i) \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$$

$$j) \frac{1}{\sqrt[4]{5}-2} = \frac{1 \cdot (\sqrt[4]{5}+2)}{(\sqrt[4]{5}-2) \cdot (\sqrt[4]{5}+2)} = \frac{\sqrt[4]{5}+2}{(\sqrt[4]{5})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt[4]{5}+2}{\sqrt[4]{5^2}-4} = \frac{\sqrt[4]{5}+2}{\sqrt{5}-4} = \frac{(\sqrt[4]{5}+2) \cdot (\sqrt{5}+4)}{(\sqrt{5}-4) \cdot (\sqrt{5}+4)} = \frac{(\sqrt[4]{5}+2) \cdot (\sqrt{5}+4)}{(\sqrt{5})^2 - 4^2} = \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt[4]{5} \cdot 4 + 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 4}{5-16}$$

Recuérdese que $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{5}$ no se pueden multiplicar, a no ser que pongamos radicales equivalentes a cada uno que tengan el mismo índice (reducción a índice común). Así $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}$.

$$\frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2} + 4\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} + 8}{-11} = \frac{\sqrt[4]{5 \cdot 5^2} + 4\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} + 8}{-11} = \frac{(\sqrt[4]{5^3} + 4\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} + 8) \cdot (-1)}{-11 \cdot (-1)} = \frac{-\sqrt[4]{5^3} - 4\sqrt[4]{5} - 2\sqrt{5} - 8}{11} = \frac{-\sqrt[4]{125} - 2\sqrt[4]{25} - 4\sqrt{5} - 8}{11}$$

¿Alguna duda en la última igualdad

$$\frac{-\sqrt[4]{5^3} - 4\sqrt[4]{5} - 2\sqrt{5} - 8}{11} = \frac{-\sqrt[4]{125} - 2\sqrt[4]{25} - 4\sqrt{5} - 8}{11} \text{ ? Por supuesto que el lector/a se}$$

habrá dado cuenta que está todo igual, salvo $2\sqrt{5} = 2\sqrt[4]{5^2} = 2\sqrt[4]{25}$ y salvo el orden de los sumandos, insistiendo en que "... la he puesto para hacer coincidir esta solución

$$\frac{-\sqrt[4]{5^3} - 4\sqrt[4]{5} - 2\sqrt{5} - 8}{11} \text{ con la propuesta inicialmente } \frac{-\sqrt[4]{125} - 2\sqrt[4]{25} - 4\sqrt{5} - 8}{11} \text{ ,}$$

k)

$$\frac{8}{\sqrt{2}-5+\sqrt{3}} = \frac{8}{(\sqrt{2}-5)+\sqrt{3}} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{[(\sqrt{2}-5)+\sqrt{3}] \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{(\sqrt{2}-5)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{2-10\sqrt{2}+5-3} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{4-10\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{2 \cdot (2-5\sqrt{2})} = \frac{8}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}}{2-5\sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}}{2-5\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}]}{2-5\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot [(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}] \cdot (2+5\sqrt{2})}{(2-5\sqrt{2}) \cdot (2+5\sqrt{2})} = \frac{[(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}] \cdot 4 \cdot (2+5\sqrt{2})}{2^2 - (5\sqrt{2})^2} = \frac{[(\sqrt{2}-5)-\sqrt{3}] \cdot (8+20\sqrt{2})}{4 - (5\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{2})} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sqrt{2}-5) \cdot 8 + (\sqrt{2}-5) \cdot 20\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot 8 - \sqrt{3} \cdot 20\sqrt{2}}{4 - 25 \cdot 2} = \frac{8\sqrt{2} - 5 \cdot 8 + 20\sqrt{2}\sqrt{2} - 5 \cdot 20\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 20\sqrt{3}\sqrt{2}}{-46} = \\
& \frac{8\sqrt{2} - 40 + 20 \cdot 2 - 100\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 20\sqrt{3} \cdot 2}{-46} = \frac{8\sqrt{2} - 40 + 40 - 100\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 20\sqrt{6}}{-46} = \\
& \frac{8\sqrt{2} - 100\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 20\sqrt{6}}{-46} = \frac{-94\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 20\sqrt{6}}{-46} = \frac{-2 \cdot (47\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 10\sqrt{6})}{-2 \cdot 23} = \\
& \frac{47\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 10\sqrt{6}}{23}
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} &= \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4}}{\sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^7}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^6} \cdot 3}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^6} \cdot \sqrt[6]{3}}{3} = \frac{3 \cdot \sqrt[6]{3}}{3} = \\
& \frac{3}{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 1 \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3}
\end{aligned}$$

5º) Simplificar:

a) $2\sqrt{45} + \sqrt{500} - 3\sqrt{245}$

b) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

c) $3a\sqrt{a^3b} - \sqrt{ab^3} + \sqrt{a^5b}$

d) $\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{\frac{8}{25}} - \sqrt{\frac{2}{225}}$

e) $\frac{(3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{72})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

f) $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80})\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}}$

g) $\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}}$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
2\sqrt{45} + \sqrt{500} - 3\sqrt{245} &= 2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{5 \cdot 10^2} - 3\sqrt{5 \cdot 7^2} = 2\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{10^2} - 3\sqrt{5} \sqrt{7^2} = \\
2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot 10 - 3\sqrt{5} \cdot 7 &= 6\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 21\sqrt{5} = (6 + 10 - 21)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}
\end{aligned}$$

b) $\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3 5^3} - \sqrt[3]{2^3 3^3} - \sqrt[3]{2^3 2} = \sqrt[3]{2} \cdot 5 - \sqrt[3]{2} \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt[3]{2} =$
 $5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} = (5 - 3 - 2) \cdot \sqrt[3]{2} = 0 \cdot \sqrt[3]{2} = 0$

c)

$$\begin{aligned}
3a\sqrt{a^3b} - \sqrt{ab^3} + \sqrt{a^5b} &= 3a\sqrt{a^2 \cdot a \cdot b} - \sqrt{a \cdot b^2 \cdot b} + \sqrt{a^4 \cdot a \cdot b} = 3a \cdot a\sqrt{a \cdot b} - b\sqrt{a \cdot b} + a^2\sqrt{a \cdot b} = \\
3a^2\sqrt{ab} - b\sqrt{ab} + a^2\sqrt{ab} &= (3a^2 - b + a^2) \cdot \sqrt{ab} = (4a^2 - b) \cdot \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

d)

$$\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{\frac{8}{25}} - \sqrt{\frac{2}{225}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{25}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{15} =$$

$$\frac{5\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{15} = \frac{5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}}{15} = \frac{10\sqrt{2}}{15} = \frac{10}{15} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

e)

$$\frac{(3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{72})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(3\sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} =$$

$$\frac{(3\sqrt{2^2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{5^2} + \sqrt{2^2} \sqrt{2} \sqrt{3^2})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 5 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3)\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} =$$

$$\frac{7\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{7 \cdot 2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{14}{\sqrt[3]{3}} = \frac{14 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{14 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3 \cdot 3^2}} = \frac{14 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{14\sqrt[3]{9}}{3}$$

f)

$$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80})\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{(\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} - 2^2 \cdot \sqrt{5})\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{(\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5})\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}} =$$

$$\frac{6\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}}$$

Se recuerda que los radicales con distinto índice $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}$ (el índice del primero es 2 y el del segundo es 4) no se pueden multiplicar, a no ser que se pongan radicales equivalentes a cada uno de los radicales de forma que tengan el mismo índice (reducción a índice común).

$$\frac{6\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{5^2 \cdot 5}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[5]{4}} = 6 \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[5]{4}}$$

Se recuerda que los radicales con distinto índice $\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[5]{4}}$ (el índice del numerador es 4 y el

del denominador es 5) no se pueden dividir, a no ser que se pongan radicales equivalentes a cada uno de los radicales de forma que tengan el mismo índice (reducción a índice común).

$$6 \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[5]{4}} = 6 \cdot \frac{\sqrt[20]{5^{15}}}{\sqrt[20]{4^4}} = 6 \cdot \sqrt[20]{\frac{5^{15}}{4^4}}$$

g)

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}}$$

Se recuerda que los radicales con distinto índice $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ (el índice del primero es 4 y

el del segundo es 3) no se pueden multiplicar, a no ser que se pongan radicales equivalentes a cada uno de los radicales de forma que tengan el mismo índice (reducción a índice común). Así:

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[12]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}\right)^4}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[12]{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[12]{\frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{b^4}{a^4}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[12]{\frac{a^3 \cdot b^4}{b^3 \cdot a^4}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[12]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[12]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[12]{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} =$$

$$\sqrt[12]{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{b}{a}}$$

Ejercicios difíciles:

6º) Demuestra que los siguientes números son enteros:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Pista: Dale nombre a cada número, por ejemplo x, y resuelve la ecuación con radicales resultante. Ten cuidado al llegar a la solución, pues al elevar los dos miembros de una ecuación a un número, se pueden introducir soluciones no válidas.

Solución: a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = x$ Resolvamos esta ecuación con radicales:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = x \Rightarrow \sqrt{7+4\sqrt{3}} = x - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 = \left(x - \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(7+4\sqrt{3})^2} = x^2 - 2x\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow 7+4\sqrt{3} = x^2 - 2x\sqrt{7-4\sqrt{3}} + 7-4\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = x^2 - 2x\sqrt{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow 2x\sqrt{7-4\sqrt{3}} = x^2 - 8\sqrt{3} \Rightarrow \left(2x\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = \left(x^2 - 8\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(2x)^2 \cdot \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 8\sqrt{3} + (8\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4x^2 \cdot (7-4\sqrt{3}) = x^4 - 16\sqrt{3} \cdot x^2 + 8\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$28x^2 - 16\sqrt{3} \cdot x^2 = x^4 - 16\sqrt{3} \cdot x^2 + 192 \Rightarrow 0 = x^4 - 28x^2 + 192$$

La ecuación $x^4 - 28x^2 + 192 = 0$ es una ecuación bicuadrada, la cual con el cambio

$y = x^2$, se convierte en la ecuación de segundo grado $y^2 - 28y + 192 = 0$. Así:

$$y = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 192}}{2 \cdot 1} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 768}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 768}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$\frac{28 \pm 4}{2}$$

Es decir: $y_1 = \frac{28+4}{2} = \frac{32}{2} = 16$; $y_2 = \frac{28-4}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

Como hicimos el cambio $y = x^2$, no se puede olvidar el deshacer el cambio:

$$x^2 = y = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$$x^2 = y = 12 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{2^2 \cdot 3} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Por tanto, las soluciones a la ecuación $x^4 - 28x^2 + 192 = 0$ son

$$x = 4, x = -4, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}.$$

Dado que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = x$, y nos dicen que es un número entero y además es fácil ver que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} > 0$, así el número $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ será 4. Es decir, $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4$.

b) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = x$. Resolvamos esta ecuación con radicales:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = x \Rightarrow \sqrt{4+2\sqrt{3}} = x + \sqrt{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(x + \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4 + 2\sqrt{3} = x^2 + 2x\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow 4 + 2\sqrt{3} = x^2 + 2x\sqrt{4-2\sqrt{3}} + 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{3} = x^2 + 2x\sqrt{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow 4\sqrt{3} - x^2 = 2x\sqrt{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow \left(4\sqrt{3} - x^2\right)^2 = \left(2x\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot x^2 + \left(x^2\right)^2 = (2x)^2 \cdot \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \cdot x^2 + x^4 = 4x^2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$16 \cdot 3 - 8\sqrt{3} \cdot x^2 + x^4 = 16x^2 - 8\sqrt{3} \cdot x^2 \Rightarrow 48 + x^4 = 16x^2 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 48 = 0$$

La ecuación $x^4 - 16x^2 + 48 = 0$ es una ecuación bicuadrada, la cual con el cambio $y = x^2$, se convierte en la ecuación de segundo grado $y^2 - 16y + 48 = 0$. Así:

$$y = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{16 \pm 8}{2}$$

$$\text{Es decir: } y_1 = \frac{16+8}{2} = \frac{24}{2} = 12; \quad y_2 = \frac{16-8}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Como hicimos el cambio $y = x^2$, no se puede olvidar (¡Hay del alumno olvidadizo que se le olvida deshacer siempre cualquier cambio!) el deshacer el cambio:

$$x^2 = y = 12 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{2^2 \cdot 3} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x^2 = y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por tanto, las soluciones a la ecuación $x^4 - 28x^2 + 192 = 0$ son

$$x = 4, x = -4, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}.$$

Dado que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = x$, y nos dicen que es un número entero y además es fácil ver que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$, así el número $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ será 2. Es decir, $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

c) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x$. Resolvamos esta ecuación con radicales:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x \Rightarrow \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3 = x^3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right) \\
& + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right)^3 = x^3 \\
& \Rightarrow \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2} + \sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^3} = x^3 \\
& \Rightarrow 20+14\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2} \cdot (20-14\sqrt{2}) + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})} \cdot (20-14\sqrt{2})^2 + (20-14\sqrt{2}) = x^3 \\
& \Rightarrow 20+14\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot (20+14\sqrt{2}) \cdot (20-14\sqrt{2})} \\
& + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot (20-14\sqrt{2}) \cdot (20-14\sqrt{2})} + 20-14\sqrt{2} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot (20^2 - (14\sqrt{2})^2)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(20^2 - (14\sqrt{2})^2) \cdot (20-14\sqrt{2})} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot (400 - 14\sqrt{2} \cdot 14\sqrt{2})} + 3 \cdot \sqrt[3]{(400 - 14\sqrt{2} \cdot 14\sqrt{2}) \cdot (20-14\sqrt{2})} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot (400 - 392)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(400 - 392) \cdot (20-14\sqrt{2})} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot 8} + 3 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot (20-14\sqrt{2})} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2}) \cdot 2^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot (20-14\sqrt{2})} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 6\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 6\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x^3 \\
& \Rightarrow 40 + 6 \cdot \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right) = x^3
\end{aligned}$$

Pero resultaba que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x$. Por tanto la ecuación a resolver es $40 + 6x = x^3 \Rightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$.

Sabemos que las soluciones que sean números enteros de la ecuación $x^3 - 6x - 40 = 0$, están entre los divisores de -40 , a saber: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$. Probemos con $x=4$, por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
& 1 & 0 & -6 & -40 \\
4 & & 4 & 16 & 40 \\
\hline
& 1 & 4 & 10 & 0
\end{array}$$

Por tanto, $x^3 - 6x - 40 = (x - 4)(x^2 - 4x + 10) = 0$

Intentemos seguir descomponiendo el polinomio $x^2 - 4x + 10$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 40}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-24}}{2}, \text{ es decir, el polinomio}$$

$x^2 - 4x + 10$ no descompone más. Por tanto:

$$x^3 - 6x - 40 = (x - 4)(x^2 - 4x + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x^2 - 4x + 10 \text{ que no tiene soluciones en los números reales} \end{cases}$$

Luego $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x = 4$.

7º) Hallar dos números racionales positivos m y n tales que verifiquen:

$$a) \sqrt{11 + \sqrt{112}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

$$b) \sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$$

Solución: a)

$$\sqrt{11+\sqrt{112}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} \Rightarrow \left(\sqrt{11+\sqrt{112}}\right)^2 = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 \Rightarrow 11 + \sqrt{112} = (\sqrt{m})^2 + 2 \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n} + (\sqrt{n})^2$$

$$11 + \sqrt{112} = m + 2\sqrt{mn} + n \Rightarrow 11 + \sqrt{112} = m + \sqrt{2^2 \cdot mn} + n \Rightarrow 11 + \sqrt{112} = m + \sqrt{4mn} + n$$

Por tanto, queda resolver el siguiente sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} m + n = 11 \\ 4mn = 112 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11 - m \\ 4m(11 - m) = 112 \end{cases} \Rightarrow 44m - 4m^2 = 112 \Rightarrow -m^2 + 11m - 28 = 0$$

Luego:

$$m = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-28)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{-2} = \frac{-11 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-11 \pm 3}{-2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = \frac{-11+3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \\ m = \frac{-11-3}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $m = 4 \Rightarrow n = 11 - 4 = 7$
- Si $m = 7 \Rightarrow n = 11 - 7 = 4$

b)

$$\sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{m} - \sqrt{n} \Rightarrow \left(\sqrt{11-4\sqrt{6}}\right)^2 = (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \Rightarrow 11 - 4\sqrt{6} = m - 2\sqrt{mn} + n \Rightarrow$$

$$11 - \sqrt{4^2 \cdot 6} = m - \sqrt{2^2 \cdot mn} + n \Rightarrow 11 - \sqrt{96} = m - \sqrt{4mn} + n$$

Por tanto, queda resolver el siguiente sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} m + n = 11 \\ 4mn = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11 - m \\ 4m(11 - m) = 96 \end{cases} \Rightarrow 44m - 4m^2 = 96 \Rightarrow -m^2 + 11m - 24 = 0$$

Luego:

$$m = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{-2} = \frac{-11 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-11 \pm 5}{-2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = \frac{-11+5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ m = \frac{-11-5}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $m = 3 \Rightarrow n = 11 - 3 = 8$
- Si $m = 8 \Rightarrow n = 11 - 8 = 3$.

Pero si $m=3$ y $n=8$, resulta que $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{3} - \sqrt{8} = -1,0963 < 0$ y

$\sqrt{11-4\sqrt{6}} = 1,0963 > 0$, y por tanto, esta solución $m=3$ y $n=8$ hay que desecharla.

Como conclusión, $m=8$, $n=3$ son los únicos dos números racionales positivos que

verifican $\sqrt{11-4\sqrt{6}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$.