

Ejemplo 1 - Contraste unilateral para medias ($\mu \geq \mu_0$).

Una máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud. Se toma una muestra de 1000 piezas, comprobándose que la media sus longitudes es de 10.0037 cm. La longitud de las piezas fabricadas por esa máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0.2 cm.

a) (0.5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis unilateral para comprobar si con los datos de esa muestra es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm.

b) (1 punto) Determine la región de aceptación de la hipótesis nula de ese contraste para un nivel de significación $\alpha = 0.025$.

c) (1 punto) Con los datos de la muestra y usando el contraste de hipótesis del primer apartado, ¿qué conclusión se obtendría sobre la longitud media de las piezas fabricadas?

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 1000$ piezas.
- Media supuesta: $\mu_0 = 10$ cm.
- Media medida: $\bar{x} = 10,0037$ cm.
- Desviación típica: $\sigma = 0,2$ cm.
- Nivel de significación: $\alpha = 0,025$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\mu \geq 10$
- Hipótesis alternativa: $\mu < 10$

3. Distribución normal para las medias: $\sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \frac{0,2}{\sqrt{1000}}\right)$ **4. Estadístico de prueba y cálculo del valor:** $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10,0037 - 10}{\frac{0,2}{\sqrt{1000}}} \approx 0,585$ **5. Región de aceptación:** Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 1 - 0,025 = 0,975$

$$P(Z \geq -Z_{1-\alpha}) = P(Z \leq Z_{1-\alpha}) = 0,975 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{1-\alpha} = 1,96 \rightarrow R.A. = (-1,96; +\infty)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como 0,585 está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se acepta la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de significación de 0,025, podemos afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina será de más de 10 cm.

Ejemplo 2 - Contraste unilateral para medias ($\mu \leq \mu_0$)

El director de un banco afirma que la cantidad media de dinero extraído, por cliente, de un cajero automático de su sucursal no supera los 120 euros. Para contrastar esta hipótesis elige al azar 100 extracciones de este cajero y obtiene una media muestral de 130 euros. Se sabe que la cantidad de dinero extraído por un cliente en un cajero automático se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 67 euros.

a) (0.5 puntos) Plantee el contraste de hipótesis asociado al enunciado.

b) (1 punto) Determine la región de aceptación, para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

c) (1 punto) Con los datos muestrales tomados, ¿existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis de este director, con el mismo nivel de significación anterior?

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 100$ extracciones.
- Media supuesta: $\mu_0 = 120$ €.
- Media medida: $\bar{x} = 130$ €.
- Desviación típica: $\sigma = 67$ €.
- Nivel de significación: $\alpha = 0,05$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\mu \leq 120$ €
- Hipótesis alternativa: $\mu > 120$ €

3. Distribución normal para las medias: $\sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(120, \frac{67}{\sqrt{100}}\right)$ **4. Estadístico de prueba y cálculo del valor:** $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{130 - 120}{\frac{67}{\sqrt{100}}} \approx 1,493$ **5. Región de aceptación:** Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$

$$P(Z \leq Z_{1-\alpha}) = 0,95 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{1-\alpha} = 1,645 \rightarrow R.A. = (-\infty; 1,645)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como 1,496 está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se acepta la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de significación de 0,05, podemos afirmar que la cantidad media de dinero extraído, por cliente, de un cajero automático de su sucursal no supera los 120 euros.

Ejemplo 3 - Contraste bilateral para medias ($\mu = \mu_0$)

Una máquina de envasado está diseñada para llenar bolsas con 300 g de almendras. Para comprobar si funciona correctamente, se toma una muestra de 100 bolsas y se observa que su peso medio es de 297 g. Suponiendo que la variable "peso" tiene una distribución Normal con varianza 16, y utilizando un contraste bilateral ¿es aceptable, a un nivel de significación de 0.05, que el funcionamiento de la máquina es correcto?

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 100$ bolsas.
- Media supuesta: $\mu_0 = 300$ g.
- Media medida: $\bar{x} = 297$ g.
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{16} = 4$ g (la desviación típica es la raíz de la varianza).
- Nivel de significación: $\alpha = 0,05$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\mu = 120$ €
- Hipótesis alternativa: $\mu \neq 120$ €

3. Distribución normal para las medias: $\sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(300, \frac{4}{\sqrt{100}}\right)$

4. Estadístico de prueba y cálculo del valor: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{297 - 300}{\frac{4}{\sqrt{100}}} \approx -7,5$

5. Región de aceptación: Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,95 + \frac{0,05}{2} = 0,975 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96 \rightarrow \mathbf{R.A.} = (-1,96; 1,96)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como -7,5 no está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se rechaza la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de significación de 0,05, podemos afirmar que la cantidad media de gramos de almendras que contiene cada bolsa no es de 300 y por tanto el funcionamiento de la máquina no es correcto.

Ejemplo 4 - Contraste unilateral para proporciones ($p \geq p_0$)

El director de una televisión afirma que un nuevo programa que va a emitirse será visto, al menos, por un 30% de personas. Una vez emitido se realizó una encuesta a 500 personas, elegidas al azar, y ésta reveló que 130 de ellas habían visto ese programa.

a) (0.5 puntos) Formule la hipótesis nula y la alternativa del contraste de hipótesis que permite determinar si los datos de la encuesta realizada son compatibles con la afirmación del director.

b) (1 punto) Halle la región crítica de ese contraste para un nivel de significación del 5.5%.

c) (1 punto) Según el dato obtenido en el apartado anterior ¿qué conclusión se obtiene sobre la afirmación realizada por el director de esa televisión?

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 500$ personas.
- Proporción supuesta: $p_0 = 30\% = 0,3$.
- Proporción medida: $\hat{p} = \frac{130}{500} = 0,26$.
- Nivel de significación: $\alpha = 5,5\% = 0,055$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\hat{p} \geq p_0$
- Hipótesis alternativa: $\hat{p} < p_0$

3. Distribución normal para la proporción: $p \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}\right) = \left(0,3; \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{500}}\right)$

4. Estadístico de prueba y cálculo del valor:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}} = \frac{0,26 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{500}}} = -1,952$$

5. Región de aceptación: Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 1 - 0,055 = 0,945$

$$P(Z \geq -Z_{1-\alpha}) = P(Z \leq Z_{1-\alpha}) = 0,945 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{1-\alpha} = 1,595 \rightarrow \mathbf{R.A.} = (-1,595; +\infty)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como -1,952 no está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se rechaza la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de significación de 0,055, podemos afirmar que el porcentaje de personas que verán el programa no será superior al 30%.

Ejemplo 5 - Contraste unilateral para proporciones ($p \geq p_0$)

En las últimas elecciones, celebradas hace un año, el 52 por ciento de los votantes de una ciudad estaban a favor del alcalde. Una encuesta, realizada recientemente, indica que, de 350 ciudadanos elegidos al azar, 198 están a favor del alcalde:

- a) ¿Se puede afirmar, con un nivel de confianza del 90%, que el alcalde pierde popularidad?
b) ¿Se obtiene la misma respuesta que en el apartado anterior si el nivel de confianza es igual a 0.99?

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 350$ personas.
- Proporción supuesta: $p_0 = 52\% = 0,52$.
- Proporción medida: $\hat{p} = \frac{198}{350} \approx 0,566$.
- Nivel de confianza: $1 - \alpha = 90\% = 0,90$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\hat{p} \leq p_0$
- Hipótesis alternativa: $\hat{p} > p_0$

3. Distribución normal para la proporción: $p \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}\right) = \left(0,52; \sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}\right)$

4. Estadístico de prueba y cálculo del valor:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}} = \frac{0,566 - 0,52}{\sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}} = 1,723$$

5. Región de aceptación: Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 0,90$

$$P(Z \leq Z_{1-\alpha}) = 0,9 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{1-\alpha} = 1,285 \rightarrow \mathbf{R.A.} = (-\infty; 1,285)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como 1,723 no está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se rechaza la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de confianza del 90%, podemos afirmar que el alcalde no pierde popularidad.

Ejemplo 6 - Contraste bilateral para proporciones ($p = p_0$)

Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenar.

Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

1. Datos:

- Tamaño de la muestra: $n = 500$ personas.
- Proporción supuesta: $p_0 = 70\% = 0,7$.
- Proporción medida: $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0,68$.
- Nivel de significación: $\alpha = 0,01$.

2. Contraste de hipótesis:

- Hipótesis nula: $\hat{p} = p_0$
- Hipótesis alternativa: $\hat{p} \neq p_0$

3. Distribución normal para la proporción: $p \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}\right) = \left(0,7; \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}}\right)$

4. Estadístico de prueba y cálculo del valor:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}} = \frac{0,68 - 0,7}{\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}}} = -0,976$$

5. Región de aceptación: Nivel de confianza $\rightarrow N.C. = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,99 + \frac{0,01}{2} = 0,995 \rightarrow \text{Tabla } N(0,1) \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575 \rightarrow \mathbf{R.A.} = (-2,575; 2,575)$$

6. Aceptación o rechazo de la hipótesis: Como -0,976 está dentro de la región de aceptación podemos decir que **se acepta la hipótesis**. Por tanto, para un nivel de significación de 0,01, podemos afirmar que el 70% de las personas cena viendo la televisión.