1 Números reales: operaciones

1. Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números expresados en forma decimal:

a) 0,43579

b) 6,37 37 37 37...

c) 4,31 311 3111 31111...

d) 0,65 56 65 65 65...

En los casos en que sea posible calcula la fracción generatriz.

2. Construye dos números irracionales explicando el método empleado en cada caso.

3. Indica el menor conjunto numérico al que pertenece cada uno de los siguientes números:

a) 7,75 76 76 76... b) $\frac{31}{15}$ c) $-\sqrt{16}$ d) 1,12 122 1222... e) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$

4. a) Completa la siguiente tabla de aproximaciones de $\sqrt{6}$:

Por defecto	2			
Por exceso	3		2,45	

b) Calcula el error máximo y acota el error relativo que se produce al tomar $\sqrt{6} = 2{,}449$.

5. Completa la tabla:

	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3} + \sqrt{7}$	ERROR	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$	ERROR
Por defecto	1,732					
Por exceso		2,646				

6. Calcula los cuatro primeros intervalos encajados de $\sqrt{18}$, siendo el error que se produce menor, respectivamente, que 1, 10^{-1}, 10^{-2} y 10^{-3}.

7. Escribe en forma potencial y simplificando al máximo las siguientes expresiones:

a) $3x^5 \cdot 2x^4$

b) $3 \cdot (x^6)^{\frac{1}{2}}$

c) $x^3 \cdot \sqrt{x^3}$

d) $x^{-3} \cdot \sqrt[4]{x^5}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3x}}$

f) $\dfrac{8x^3}{\sqrt{x}}$

g) $\dfrac{4x^2}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

h) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}}$

i) $3^x 7^x 2^{2x}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3x}}$

k) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4}}}$

l) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(x-1)^3}}}$

8. Se consideran los siguientes números: $x = 654\,321\,000\,000$; $y = 0{,}00001234$. Escribe en notación científica:

a) x b) y c) xy d) $\dfrac{x}{y}$

9. Calcula el área de un triángulo equilátero cuya altura mide 6 cm.

SOLUCIONES

1. a) Decimal exacto, racional.

b) Decimal periódico, racional.

c) Decimal no periódico, irracional.

d) Decimal periódico, racional.

a) $q = 0{,}43579$

Se multiplica por 100 000:

$100\,000q = 43\,579 \Rightarrow q = \dfrac{43\,579}{100\,000}$

b) $q = 6{,}37\ 37\ 37...$

Se multiplica por 100:

$100q = 637,\ 37\ 37\ 37...$

Se resta q:

$9q = 637 - 6$

Se halla el valor de q:

$q = \dfrac{637 - 6}{99} = \dfrac{631}{99}$

d) $q = 0{,}6556\ 65\ 65...$

Se multiplica por 1 000 000:

$1\,000\,000q = 655\,665{,}65\ 65...$

Se multiplica por 10 000:

$10\,000q = 6\,556{,}65\ 65...$

Se resta $1\,000\,000q - 10\,000q$:

$990\,000q = 655\,665 - 6\,556$

Se halla el valor de q:

$q = \dfrac{655\,665 - 6\,556}{990\,000} = \dfrac{649\,109}{990\,000}$

2. Respuesta abierta. Por ejemplo:

1,2 4 8 16 32 64...; a partir de las sucesivas potencias de 2.

0,3 5 7 9 11 13 15...; utilizando los números impares.

3. a) Racionales

b) Racionales

c) Enteros

d) Irracionales

e) Irracionales

4. a) $2^2 = 4 < 6 < 3^2 = 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$

Por defecto	2	2,4	2,44	2,449
Por exceso	3	2,5	2,45	2,450

b) A partir de la tabla se obtiene:

$2{,}449 < \sqrt{6} < 2{,}450$

Error máximo: $2{,}450 - 2{,}449 = 0{,}001$

Error relativo $\varepsilon_r < \dfrac{0{,}001}{2{,}449} = \dfrac{1}{2\,449}$

5.

<table>
<tr><th></th><th>$\sqrt{3}$</th><th>$\sqrt{7}$</th><th>$\sqrt{3}+\sqrt{7}$</th><th>ERROR</th><th>$\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$</th><th>ERROR</th></tr>
<tr><td>Por defecto</td><td>1,732</td><td>2,645</td><td>4,377</td><td rowspan="2">0,002</td><td>4,581</td><td rowspan="2">0,005</td></tr>
<tr><td>Por exceso</td><td>1,733</td><td>2,646</td><td>4,379</td><td>4,586</td></tr>
</table>

6. $4^2 = 16 < 18 < 25 = 5^2 \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5$

Por defecto	4	4,2	4,24	4,242
Por exceso	5	4,3	4,25	4,243
Error menor que	1	0,1	0,01	0,001

7. a) $6x^9$ d) $x^{-\frac{7}{4}}$ g) $2 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$ j) $(3x)^{\frac{1}{12}}$

b) $3x^3$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$ h) $(2x - 1)^{\frac{1}{6}}$ k) $x^{\frac{2}{9}}$

c) $x^{\frac{9}{2}}$ f) $2^3 \cdot x^{\frac{5}{2}}$ i) 84^x l) $(x - 1)^{\frac{1}{8}}$

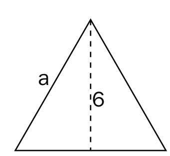
8. a) $x = 6{,}54321 \cdot 10^{11}$

b) $y = 1{,}234 \cdot 10^{-5}$

c) $xy = 8{,}07432114 \cdot 10^{6}$

d) $\dfrac{x}{y} = 5{,}302439222 \cdot 10^{16}$

9. Sea a el lado del triángulo equilátero cuya altura mide 6 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:



$a^2 = 6^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$a^2 = 6^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow \dfrac{3a^2}{4} = 6^2$

$a^2 = 48;\ a = \sqrt{48}\ \text{cm} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$

$\text{Área} = \dfrac{6a}{2}\ \text{cm}^2 = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

2 Números reales: ordenación

1. Indica el número más grande en los siguientes pares:

a) $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ b) 3,24715691 y 3,24691291

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$2\sqrt{2}$; π; $-3,3333...$; $-\sqrt{4}$; $\frac{3}{5}$

3. Escribe tres números comprendidos entre:

a) $\frac{3}{13}$ y $\frac{4}{13}$

b) $\frac{2}{15}$ y $\frac{11}{68}$

c) 0,0765 y 0,0766

d) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$

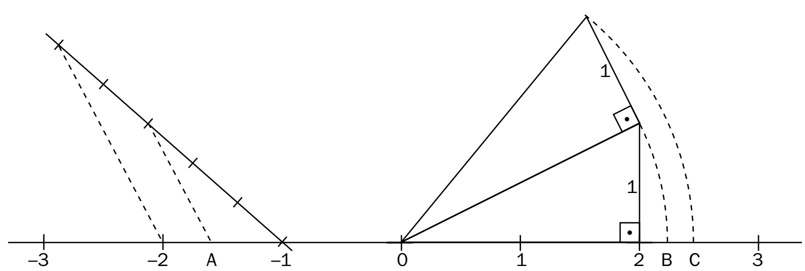
4. Los egipcios utilizaron $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ como valor de $\pi = 3,141592...$ ¿Es la aproximación mayor o menor que π?

5. Representa sobre la recta real los siguientes conjuntos de números:

a) $[3, 5]$ b) $(-3, 2)$ c) $[1, +\infty)$ d) $|x| > 5$ e) $|x - 5| \leqslant 2$

6. Representa $\sqrt{10}$, $\sqrt{27}$ y $\frac{10}{7}$.

7. Indica qué números representan los puntos A, B y C.



8. Una persona hace donaciones mensuales a una ONG. Empezó donando 100 euros y la decimoquinta donación fue de 450 euros. Se sabe que dicha persona aumentaba su donación una cantidad constante cada mes.

a) Encuentra una fórmula que permita saber el importe de la donación conocido el mes.

b) Calcula el importe de la octava donación.

SOLUCIONES

1. a) $\frac{3}{8} - \frac{2}{7} = \frac{21 - 16}{56} = \frac{5}{56} > 0$; por tanto, es mayor el segundo número.

b) $3{,}24715691 - 3{,}24691291 = 0{,}000244 > 0$; por tanto, es mayor el primer número.

2. $-3{,}3333 \ldots < -\sqrt{4} = -2 < \frac{3}{5} = 0{,}6 < 2\sqrt{2} = 2{,}8284\ldots < \pi = 3{,}1415\ldots$

3. Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{13}{52}$, $\frac{14}{52}$ y $\frac{15}{52}$, pues:

$\frac{3}{13} = \frac{12}{52} < \frac{13}{52} < \frac{14}{52} < \frac{15}{52} < \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

b) $\frac{29}{210}$, $\frac{30}{210}$ y $\frac{31}{210}$, pues:

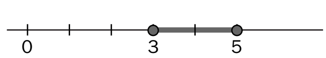
$\frac{2}{15} = \frac{28}{210} < \frac{29}{210} < \frac{30}{210} < \frac{31}{210} < \frac{33}{210} = \frac{11}{70} < \frac{11}{68}$

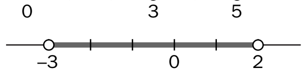
c) 0,07651; 0,07652 y 0,07653, pues: $0{,}0765 < 0{,}07651 < 0{,}07652 < 0{,}07653 < 0{,}0766$

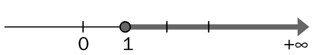
d) 2,24; 2,36 y 2,41, pues: $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots < 2{,}24 < 2{,}36 < 2{,}41 < \sqrt{6}$

4. La aproximación utilizada por los egipcios es mayor que π, pues:

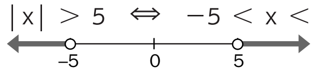
$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots > 3{,}14159\ldots = \pi$

5. a) 

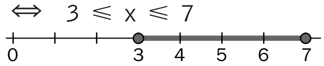
b) 

c) 

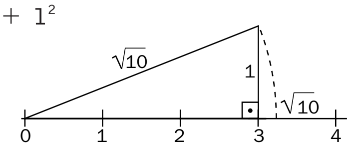
d) $|x| > 5 \iff -5 < x < 5$



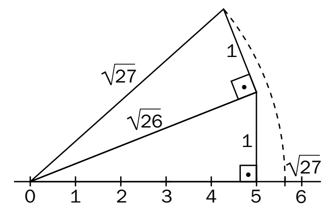
e) $|x - 5| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x - 5 \leqslant 2 \iff 3 \leqslant x \leqslant 7$



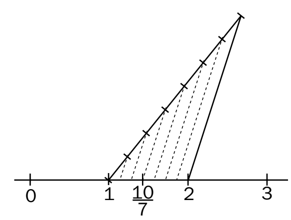
6. $10 = 3^2 + 1^2$



$27 = 5^2 + 1^2 + 1^2$



$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$



7. $A = -1 + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{8}{5}$

$B = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$C = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{5 + 1} = \sqrt{6}$

8. a) 1.ª semana: $D_1 = 100$

2.ª semana: $D_2 = 100 + p$

3.ª semana: $D_3 = 100 + p + p = 100 + 2p$

La serie anterior sugiere que $D_n = 100 + (n - 1)p$. Se prueba por inducción que la fórmula es cierta.

1) La igualdad es cierta para $n = 1$: $D_1 = 100 = 100 + 0p$

2) Se supone que es cierta para $n - 1$: $D_{n-1} = 100 + (n - 2)p$

3) Se demuestra que es cierta para n: $D_n = D_{n-1} + p = 100 + (n - 2)p + p = 100 + (n - 2 + 1)p = 100 + (n - 1)p$

Queda demostrada la fórmula para cualquier número natural.

Cálculo del valor de p:

$D_{15} = 100 + 14p = 450 \Rightarrow p = \frac{350}{14} = 25$

La fórmula que permite conocer la donación, en euros, correspondiente al mes n-ésimo es:

$D_n = 100 + 25(n - 1)$

b) $D_8 = 100 + 7 \cdot 25 = 275$. El importe de la octava donación fue de 275 euros.

3 Polinomios

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $2x^2y^3 - 5x^2 + 4x^2y^3$

b) $\frac{4}{5}x^3y - 2x^3y$

c) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right) \cdot \left(\frac{9}{4}x^4yz^2\right)$

d) $(3x - 2)(3x + 2)$

e) $(2x - 5)^2$

f) $\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2$

g) $(3x^2 + x)^2$

h) $(1 + x + x^2)^2$

i) $(1 - x)^3$

2. Halla el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ para $x = 2$

b) $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 2$ para $x = -1$

c) $R(x) = 4x^2(x^3 + 2x^2)$ para $x = -2$

3. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3x^3 - x^2 + 2) + (4x^3 + 2x^2 - 5x)$

b) $(2x^2 + x - 3) - (3x^2 + x - 5)$

4. Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3$; $Q(x) = x + 1$; $R(x) = 2x^3 - x^2 - x$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x)(Q(x) + R(x))$

c) $P(x) \cdot Q(x) + R(x)$

d) $(P(x) + R(x)) : Q(x)$

e) $(R(x) - P(x)) : Q(x)$

f) $(R(x) + Q(x)) : P(x)$

5. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $8x^5 - 12x^3 + 20x^2$

b) $18x^3y^2 - 30x^2y^2$

c) $10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3$

6. Sin efectuar las divisiones, halla el resto de dividir:

a) $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1)$ entre $(x - 1)$.

b) $(x^7 - 5x^4)$ entre $(x + 1)$.

c) $(x^4 - 3x^3 + 2x - 9)$ entre $(x - 2)$.

7. Halla el valor de k para que el polinomio $x^3 - kx^2 + 4x - 3$ sea divisible por $x - 1$.

8. Halla el valor de k para que el polinomio $2x^3 + 4x^2 + x + k$ sea divisible por $x + 1$.

9. Halla el valor de k para que al dividir el polinomio $x^4 - kx^3 + 2x - 1$ entre $x - 2$ obtengamos de resto 3.

10. Escribe un polinomio que tenga por raíces 1, 2 y -3.

11. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $x^3 - 4x$

c) $x^4 - 1$

12. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

c) $x^4 - 16$

SOLUCIONES

1. a) x^2y^3

b) $\frac{-6}{5}x^3y$

c) $\frac{3}{2}x^5y^3z^2$

d) $9x^2 - 4$

e) $4x^2 - 20x + 25$

f) $\frac{1}{9}x^4y^2$

g) $9x^4 + 6x^3 + x^2$

h) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

i) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$

2. a) $P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$

b) $Q(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 2 = -10$

c) $4(-2)^2 \cdot ((-2)^3 + 2(-2)^2) = 0$

3. a) $7x^3 + x^2 - 5x + 2$

b) $-x^2 + 2$

4. a) $-2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$

b) $4x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3$

c) $4x^3 + x^2 - 4x - 3$

d) cociente: $2x^2 - x$, resto: -3

e) cociente: $2x^2 - 5x + 4$, resto: -1

f) cociente: $x - \frac{1}{2}$, resto: $3x - \frac{1}{2}$

5. a) $4x^2(2x^3 - 3x + 5)$

b) $6x^2y^2(3x - 5)$

c) $5ab(2a^2 - 3ab + 4b^2)$

6. a) Resto $= 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = -1$

b) Resto $= (-1)^7 - 5(-1)^4 = -6$

c) Resto $= 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 9 = -13$

7. $1^3 - k \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow k = 2$

8. $2(-1)^3 + 4(-1)^2 + (-1) + k = 0 \Rightarrow k = -1$

9. $2^4 - k \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow k = 2$

10. Respuesta múltiple. Por ejemplo:

$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 - 7x + 6$

11. a) -3, -1 y 1

b) -2, 0 y 2

c) -1 y 1

12. a) $(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

b) $x(x - 3)(x - 1)(x + 2)$

c) $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$

4 Ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x+2}{5} - x = 3x - \dfrac{4-x}{3}$ b) $\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{x}{12} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x+2}{4}$ c) $\dfrac{\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3}}{3} + x = \dfrac{\dfrac{2x-1}{3}}{6}$

2. Un compuesto farmacéutico tiene una quinta parte de cloruro sódico, una cuarta parte de tricetol, la mitad de bencidamina y 25 mg de excipiente. Calcula el peso del compuesto.

3. Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $12x^2 + 15x - 18 = 0$ c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $2x^2 - 6 = 0$ d) $x^2 + x + 1 = 0$

Determina el número de soluciones antes de resolverlas y resuélvelas cuando sea posible.

4. a) La suma de dos números es 22 y la suma de sus cuadrados es 274. Halla ambos números.

b) El producto de dos números excede en una unidad al triple de su suma, y su diferencia es igual a 9. Halla ambos números.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ c) $\sqrt[3]{2x-1} = 5$

b) $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$ d) $\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} = 1$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2 + x \geqslant 5(x+1)$ c) $x^2 + 2x - 15 \leqslant 0$

b) $x + \dfrac{x-1}{5} < 2x - \dfrac{3-x}{2}$ d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

7. Un pintor tarda 12 horas en pintar un piso; otro pintor lo hace en 18 horas. ¿Cuántas horas tardarán en pintarlo entre los dos?

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{-4x+2}{5} = \dfrac{10x-4}{3} \Leftrightarrow -62x = -26 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{31}$

b) $\dfrac{2x - 10 - x}{12} = \dfrac{4x + 3x + 6}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x = 16 \Leftrightarrow x = \dfrac{-8}{3}$

c) $\dfrac{\dfrac{3x - 2x}{6}}{3} + x = \dfrac{2x - 1}{18} \Leftrightarrow \dfrac{x + 18x}{18} =$

$= \dfrac{2x - 1}{18} \Leftrightarrow 17x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{17}$

2. Sea c el peso en gramos del compuesto.

$\dfrac{c}{5} + \dfrac{c}{4} + \dfrac{c}{2} + 25 = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4c + 5c + 10c + 500 = 20c \Leftrightarrow c = 500$

El compuesto tiene una masa de 500 mg.

3. a) $12x^2 + 15x - 18 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$b^2 - 4ac = 121 > 0$; dos soluciones.

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \dfrac{-5 \pm 11}{8} \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ x = -2 \end{cases}$

b) $2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$

$b^2 - 4ac = 12 > 0$; dos soluciones, $x = \pm\sqrt{3}$

c) $b^2 - 4ac = 0$, solución doble.

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$

d) $b^2 - 4ac = -3 < 0$; la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

4. a) Por sumar 22, si uno de los números es x, el otro será $22 - x$.

$x^2 + (22 - x)^2 = 274 \Leftrightarrow x^2 - 22x + 105 = 0$

$x = \dfrac{22 \pm \sqrt{484 - 420}}{2} = \dfrac{22 \pm 8}{2} \begin{cases} x = 7 \\ x = 15 \end{cases}$

Hay dos posibilidades (que van a dar la misma solución):

— Si uno de los números es 7, el otro es 15.

— Si uno de los números es 15, el otro es 7.

Solución: Los números pedidos son 7 y 15.

b) Puesto que la diferencia es 9, si un número es x, el otro es $x + 9$.

$x(x + 9) - 1 = 3[x + (x+9)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -7$

Se obtienen dos soluciones:

— Si uno de los números es 4, el otro es 13.

— Si uno de los números es -7, el otro es 2.

5. a) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Para $x = 1$: $1 - 9 + 23 - 15 = 0$

Haciendo la división: $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 8x + 15) = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = 5$

Solución: $x = 1,\ x = 3,\ x = 5$.

b) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Ni $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ cumplen la igualdad.

Para $x = -2$: $-16 + 36 - 14 - 6 = 0$

Haciendo la división: $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3;\ x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = -2,\ x = -3,\ x = \dfrac{1}{2}$.

c) $\sqrt[3]{2x - 1} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x - 1})^3 = 5^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 125 \Leftrightarrow x = \dfrac{126}{2} = 63$

Comprobación: $\sqrt[3]{126 - 1} = 5$; solución: $x = 63$.

d) $(\sqrt{2x - 5})^2 = (1 + \sqrt{x - 3})^2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x - 3} \Leftrightarrow x - 3 = 2\sqrt{x - 3} \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = 7;\ x = 3$

Comprobación:

— Si $x = 7$: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

— Si $x = 3$: $\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$

Solución: $x = 7,\ x = 3$.

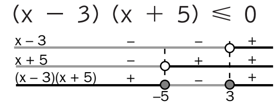
6. a) $2 + x \geqslant 5(x + 1) \Leftrightarrow -3 \geqslant 4x \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{10x + 2x - 2}{10} < \dfrac{20x - 15 + 5x}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -13x < -13 \Leftrightarrow x > 1$

c) $x^2 + 2x - 15 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) \leqslant 0$

Solución: $[-5, 3]$



d) $4x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 < 0$, lo que es imposible. La ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

7. Si entre los dos tardan x horas, en una hora pintarán $\dfrac{1}{x}$ partes del piso.

$\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{5}{36} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{36}{5} = 7{,}2$ horas

Entre los dos pintores tardarán 7 horas y 12 minutos.

5 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$

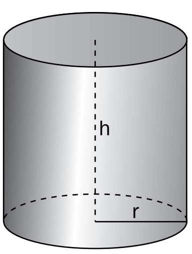
2. Resuelve encontrando previamente un sistema triangular equivalente:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ 2x - 3y = 1 \\ -2x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

4. El volumen de un cilindro recto es 63π cm^3 y su altura es 1 cm mayor que el doble de la medida del radio. Encuentra las dimensiones del cilindro.



5. En un número de dos dígitos, el de las unidades excede en dos al triplo del de las decenas. Si se cambian los dígitos de posición, la diferencia entre el nuevo número y el original es de 36 unidades. ¿Cuál es el número inicial?

6. Se quiere repartir 17 200 euros entre tres socios de modo que por cada 2 euros que reciba el primero, el segundo reciba 3 y no sobre ningún euro, y por cada 5 euros que reciba el segundo, el tercero reciba 6 y tampoco sobre ninguno. ¿Cuánto dinero recibirá cada socio?

7. Resuelve geométricamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y \geqslant 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,\ y = -2$

b) Se divide la 2.ª ecuación por -5:

$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 5$

Infinitas soluciones

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones se obtiene $0 = 11$; por tanto, el sistema no tiene solución.

2. a) Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, y a la 3.ª dos veces la 1.ª:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 2 \\ -y - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Simplificando la 2.ª} \\ \text{3.ª} - \text{2.ª} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -3z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} z &= 3 \\ y &= z - 1 = 2 \\ x &= z - y = 1 \end{aligned}$$

b) Restando a la 2.ª la 1.ª y sumando a la 3.ª la 1.ª:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2y + z = -4 \\ 3y - 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow (3.^a + 4 \cdot 2.^a)$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2y + z = -4 \\ -5y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 3 \\ z &= 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

3. a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 = 36 \iff y = \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

Solución: $x = y = +3\sqrt{2}$; $x = y = -3\sqrt{2}$

b) Sumando a la 2.ª dos veces la 1.ª:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$

$y^2 = \dfrac{25}{9} \iff y = \pm\dfrac{5}{3} \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 = \dfrac{11}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pm\sqrt{11}}{3}$; $y = \pm\dfrac{5}{3}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)y = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y - y^2 = 3 \iff y = 3,\ y = 1$

Para $y = 3$, $x = 1$; para $y = 1$, $x = 3$.

4. El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura. Si h representa la medida de la altura en centímetros, se tiene: $63\pi = \pi r^2 h$, donde r representa la medida del radio de la base.

Como $h = 2r + 1$ se obtiene:

$63\pi = \pi r^2 (2r + 1) \iff 2r^3 + r^2 - 63 = 0 \iff$

$\iff (r - 3)(2r^2 + 7r + 21) = 0$

La ecuación de segundo grado $2r^2 + 7r + 21 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$ ya que su discriminante es negativo; por tanto, la única solución de la ecuación es $r = 3$; $h = 7$.

El radio mide 3 cm y la altura 7 cm.

5. Sean x las decenas e y las unidades del número, que se expresa $10x + y$.

$\begin{cases} y - 2 = 3x \\ (10y + x) - (10x + y) = 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 5 \end{aligned}$

El número buscado es 15.

6. Sean A, B y C los euros que reciben el primer, segundo y tercer socio, respectivamente.

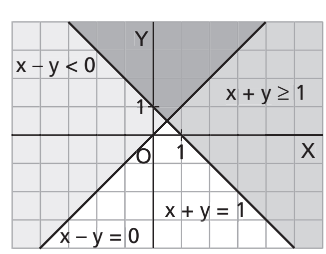
$$\begin{cases} A + B + C = 17\,200 \\ \dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{3} \\ \dfrac{B}{5} = \dfrac{C}{6} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$C = 7\,200$; $B = 6\,000$; $A = 4\,000$

Solución: El primer socio recibe 4 000 euros, el segundo 6 000 y el tercero 7 200 euros.

7.



6 Funciones

1. Se considera la función que asigna a cada número real el doble de su cuadrado aumentado en 3 unidades.

a) Escribe su expresión algebraica.

b) ¿Cuál es la imagen de 2?

c) ¿Qué número o números tienen como imagen 5?

d) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es su recorrido?

e) ¿En qué puntos corta la función al eje OX?

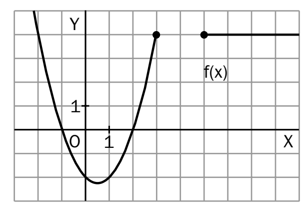
f) ¿En qué punto corta la función al eje OY?

2. A la vista de la gráfica de la función f, establece:

a) f(3) y f(9).

b) El dominio de f.

c) Los puntos donde f corta los ejes coordenados.



3. Representa la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

4. Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$, calcula:

a) $f(3) + g(3)$

b) $\dfrac{f(5)}{g(5)}$

c) $f(x) - g(x)$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 4}}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

6. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^2$.

a) Calcula $f(g(x))$

b) Calcula $g(f(x))$

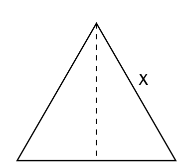
c) ¿Es $f(g(x)) = g(f(x))$?

7. Halla la función recíproca de $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

8. Considera un triángulo equilátero de lado x.

a) Expresa su altura en función del valor del lado (puedes usar el teorema de Pitágoras, pero recuerda que solo es válido para triángulos rectángulos).

b) Halla el valor de la altura cuando el lado mide 6 cm.



9. Una empresa de alquiler de coches tiene la siguiente tarifa: 30 euros por la formalización del alquiler del vehículo y 0,09 euros por kilómetro recorrido.

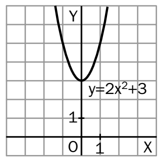
a) Calcula la expresión algebraica de la función que indica el dinero a pagar según los kilómetros recorridos.

b) ¿Cuánto tendrá que pagar una persona que recorrió 120 kilómetros con un coche alquilado?

c) Dibuja la gráfica de la función.

SOLUCIONES

1. a) $f(x) = 2x^2 + 3$.



b) $f(2) = 11$

c) $f(x) = 2x^2 + 3 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

d) $D(f) = \mathbb{R}$

A partir de la gráfica de la función se observa que para cualquier valor de x el correspondiente valor de y es siempre mayor o igual que 3; por tanto, $f(D) = [3, +\infty)$.

e) Como $2x^2 + 3 = 0$ no tiene solución real, la función no corta el eje OX.

f) $y = f(0) = 3 \Rightarrow$ f corta el eje OY en el punto (0, 3).

2. La función dibujada es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$

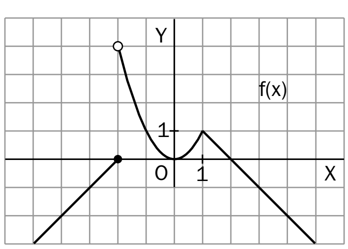
aunque no es necesario que los alumnos conozcan su expresión algebraica.

a) $f(3) = 4$; $f(9) = 4$

b) $D(f) = (-\infty, 3]$ y $[5, +\infty)$

c) f corta el eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$; f corta el eje OY en $(0, -2)$.

3.



4. a) $f(3) + g(3) = 18 + 5 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{61}{3}$

b) $\frac{f(5)}{g(5)} = \frac{50 + 5}{\frac{1}{5} - 3} = \frac{275}{-14} = -\frac{275}{14}$

c) $f(x) - g(x) = 2x^2 + 5 - \left(\frac{1}{x} - 3\right) =$
$= 2x^2 + 8 - \frac{1}{x} = \frac{2x^3 + 8x - 1}{x}$

5. a) La expresión de f tiene sentido si $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$; por lo tanto, $D(f) = (4, +\infty)$.

b) La expresión de f tiene sentido si $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$; por lo tanto, $D(f) = [-1, +\infty)$.

6. a) $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $g(f(x)) = g(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 = -1$

c) A partir de los apartados anteriores se concluye que no.

7. Intercambiando variables:

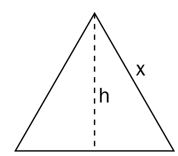
$x = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$ es la función recíproca.

8. a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$

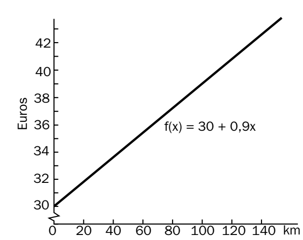


b) $h = \frac{\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

9. a) $f(x) = 30 + 0{,}09x$, donde x representa los kilómetros recorridos.

b) $f(120) = 40{,}8$ euros.

c)



7 Funciones dadas por tablas

1. Halla los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{n - 1}{2n + 1}$ b) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

2. En una sucesión aritmética, el primer término es $a_1 = 5$ y la diferencia es $d = 3$.

a) Halla los cinco primeros términos.   b) Escribe la expresión del término general.

3. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

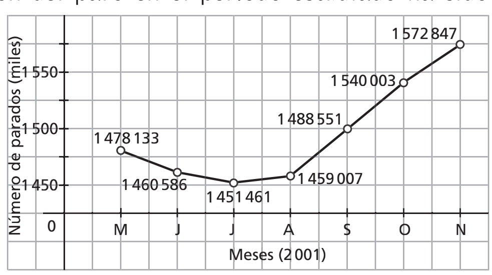
a) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots\right\}$ b) $\{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$

4. La gráfica muestra la evolución del paro en España entre los meses de mayo y noviembre del año 2001.

a) Calcula el dominio y el recorrido de la función.

b) Señala el mes en que hubo más personas paradas y el mes en que hubo menos paro.

c) ¿Se puede decir que la evolución del paro en el período estudiado ha sido positiva?



5. La tabla describe la evolución del precio del barril de petróleo, en dólares, entre los años 1990 y 1998.

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Dólares/barril	27	24	19	17	18	17	21	19	13

a) Dibuja una gráfica que describa la evolución del precio del barril de petróleo.

b) Halla el dominio y el recorrido de la función.

6. De una determinada función se sabe que pasa por los puntos A(1, 1) y B(5, 9).

a) Halla la recta de interpolación para dicha función.

b) ¿Qué valor tomará la función de interpolación para $x = 3{,}3$?

7. Considera la siguiente tabla:

X	2	5
Y	−3	4

Encuentra, mediante interpolación lineal, el valor correspondiente a $x = 3$.

8. Halla la función de interpolación cuadrática para los valores de la siguiente tabla y encuentra el valor correspondiente a $x = 2$.

X	0	1	3
Y	2	6	20

9. Un bebé midió al nacer 47 centímetros. Al cabo de una semana había crecido 2 centímetros, y a las tres semanas medía 52 centímetros. Halla la función de interpolación de segundo grado correspondiente a estos datos y estima:

a) Cuánto medía el bebé cuando tenía dos semanas.

b) Cuánto cabe esperar que mida a las cinco semanas.

SOLUCIONES

1. a) $a_1 = 0;\ a_2 = \dfrac{1}{5};\ a_3 = \dfrac{2}{7};\ a_4 = \dfrac{1}{3};\ a_5 = \dfrac{4}{11}$

b) $b_1 = 1;\ b_2 = -\dfrac{1}{2};\ b_3 = \dfrac{1}{3};\ b_4 = -\dfrac{1}{4};\ b_5 = \dfrac{1}{5}$

2. a) $a_1 = 5;\ a_2 = 5 + 3 = 8;\ a_3 = 8 + 3 = 11;$ $a_4 = 11 + 3 = 14;\ a_5 = 14 + 3 = 17$

b) Por tratarse de una sucesión aritmética, el término general es de la forma: $a(n) = a_n = a \cdot n + b$.

$$\begin{cases} a_1 = 5 = \ \ a + b \\ a_2 = 8 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix} \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

3. a) Observando los términos dados, se deduce que $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$

b) Puesto que cada término se obtiene del anterior sumando 4 unidades, se trata de una sucesión aritmética. El término general es de la forma $a(n) = a_n = a \cdot n + b$.

$$\begin{cases} a_1 = 1 = \ \ a + b \\ a_2 = 5 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = -3 \end{matrix} \Rightarrow a_n = 4n - 3$$

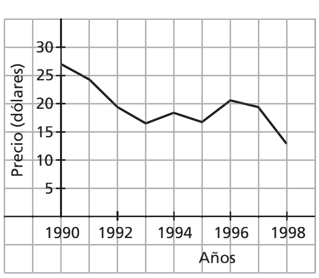
4. a) Dominio: [mayo 2001, noviembre 2001]

Recorrido: [1 451 461, 1 572 847]

b) El mayor paro se registró en noviembre y el menor en julio.

c) Aunque la función crece entre julio y noviembre, este crecimiento se tiene que interpretar como un dato negativo desde el punto de vista social.

5. a)



b) Dominio: [1990, 1998]
Recorrido: [13, 27]

6. a) La recta de interpolación es de la forma: $y = ax + b$. Como pasa por los puntos (1, 1) y (5, 9):

$$\begin{cases} 1 = \ \ a + b \\ 9 = 5a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

b) Para $x = 3{,}3$ la función de interpolación tomará el valor $y = 5{,}6$.

7. La recta de interpolación es de la forma: $f(x) = ax + b$. Pasa por los puntos (2, −3) y (5, 4); por tanto:

$$\begin{cases} f(2) = 2a + b = -3 \\ f(5) = 5a + b = \ \ 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{3},\ b = -\frac{23}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{7x - 23}{3}$$

El valor correspondiente a $x = 3$ es $f(3) = -\dfrac{2}{3}$.

8. La función de interpolación es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} f(0) = c = 2 \\ f(1) = a + b + c = 6 \\ f(3) = 9a + 3b + c = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + 2$$

El valor correspondiente a $x = 2$ es $f(2) = 12$.

9. La función buscada es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo x la edad, en semanas, del bebé.

$$\begin{cases} f(0) = c = 47 \\ f(1) = a + b + c = 49 \\ f(3) = 9a + 3b + c = 52 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{6},$$

$$b = \frac{13}{6},\ c = 47 \Rightarrow f(x) = \frac{(-x^2 + 13x)}{6} + 47$$

a) $f(2) = 50{,}\widehat{6}$. A las dos semanas medía 50,7 cm.

b) $f(5) = 53{,}\widehat{6}$. A las cinco semanas cabe esperar que mida 53,7 cm.

8 Progresiones. Matemática financiera

1. En una progresión aritmética, el primer término es $a_1 = 4$ y la diferencia es $d = 4$.

a) Halla sus cinco primeros términos.

b) Escribe la expresión del término general.

2. Halla el término decimoquinto de una progresión aritmética de la que se sabe que $a_2 = 6$ y la diferencia es $d = 3$.

3. Halla la suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_3 = 0$ y $a_7 = 20$.

4. De una progresión geométrica de términos positivos se sabe que $a_2 = 15$ y $a_4 = 135$.

a) Calcula la razón.

b) Escribe los seis primeros términos.

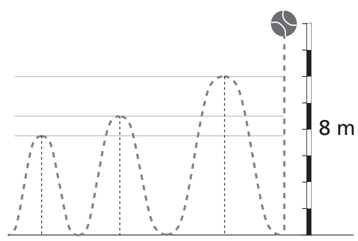
5. Una pelota se deja caer desde una altura de 8 m, rebota en el suelo y vuelve a subir hasta los tres cuartos de la altura inicial, rebota y vuelve a subir hasta los tres cuartos de la altura que alcanzó en el primer rebote, y así sucesivamente.

a) Señala qué alturas alcanza la pelota al rebotar las cuatro primeras veces.

b) ¿Qué tipo de progresión forman las alturas anteriores?

c) Escribe el término general que establece la altura alcanzada por la pelota en el n-ésimo rebote.

d) ¿A qué altura subirá la pelota después del décimo rebote?



6. Inserta cuatro términos entre 4 y 4 096, de modo que formen una progresión geométrica.

7. Halla la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y r $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. ¿Qué beneficio producirá un capital de 21 000 euros, al cabo de 500 días, si le aplicamos un interés simple anual del 3,5 %?

9. Calcula el capital final producido por un depósito de 3 000 euros al 4,5 % de interés compuesto durante 5 años.

10. Calcula el capital final que obtenemos al depositar 12 500 euros al 4 % de interés compuesto durante 4 años, en los siguientes casos:

a) El interés se paga anualmente.

b) El interés se paga trimestralmente.

c) El interés se paga mensualmente.

11. Calcula la anualidad de amortización que tenemos que abonar para devolver un crédito de 2 400 euros al 6 % de interés compuesto en el plazo de 12 años.

12. Un banco nos concede un préstamo de 60 000 euros al 7 % anual. ¿Qué capital debemos al banco al cabo de cinco años si hemos pagado 7 000 euros cada año?

13. Hemos suscrito un plan de ahorro a 8 años en el cual depositamos una anualidad de capitalización de 1 100 euros al 7,5 % anual. ¿Qué capital tendremos al cabo de los ocho años?

14. Una persona contrata un plan de pensiones con una prima anual de 300 euros. Si se jubila dentro de 15 años, ¿qué capital tendrá en el momento de la jubilación si el banco lo capitaliza al 8 % anual?

SOLUCIONES

1. a) $a_1 = 4$

$a_2 = 4 + 4 = 8$

$a_3 = 8 + 4 = 12$

$a_4 = 12 + 4 = 16$

$a_5 = 16 + 4 = 20$

b) $a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4n$

2. $a_2 = a_1 + d \Rightarrow 6 = a_1 + 3 \Rightarrow a_1 = 3$

$a_{15} = a_1 + (15 - 1)d = 3 + 14 \cdot 3 = 45$

3. $a_7 = a_3 + 4d \Rightarrow 20 = 0 + 4d \Rightarrow d = 5$

$a_1 = a_3 - 2d = -10$

$a_{10} = a_1 + 9d = 35;$

$$S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(-10 + 35)}{2} = 125$$

4. a) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \Rightarrow 135 = 15r^2 \Rightarrow r = 3$

b) $a_1 = \frac{a_2}{r} = 5;\ a_2 = 15;\ a_3 = 15 \cdot 3 = 45$

$a_4 = 135;\ a_5 = 135 \cdot 3 = 405$

$a_6 = 405 \cdot 3 = 1\,215$

5. a) Las alturas son:

$$h_1 = \frac{3}{4} \cdot 8 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{3}{4} \cdot 6 \text{ m} = 4{,}5 \text{ m}$$

$$h_3 = \frac{3}{4} \cdot 4{,}5 \text{ m} = 3{,}375 \text{ m}$$

$$h_4 = \frac{3}{4} \cdot 3{,}375 \text{ m} = 2{,}53125 \text{ m}$$

b) Forman una progresión geométrica.

c) $h_n = h_1 \cdot r^{n-1} = 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

d) $h_{10} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}45 \text{ m} = 45 \text{ cm}$

6. $a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow 4\,096 = 4r^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^5 = 1\,024 = 2^{10} \Rightarrow r = 4$

Luego la progresión está formada por:

$a_1 = 4;\ a_2 = 4 \cdot 4 = 16;\ a_3 = 16 \cdot 4 = 64;$

$a_4 = 64 \cdot 4 = 256;\ a_5 = 256 \cdot 4 = 1\,024;$

$a_6 = 1\,024 \cdot 4 = 4\,096$

7. $$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. $500 \text{ días} = \frac{500}{365} \approx 1{,}37 \text{ años} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = C_i(1 + in) =$

$= 21\,000(1 + 0{,}035 \cdot 1{,}37) \approx 22\,007$ €

El beneficio es, por tanto, de 1 007 euros.

9. $C_5 = C(1 + i)^5 = 3\,000(1 + 0{,}045)^5 =$

$= 3\,738{,}55$ €

10. a) $C_4 = C(1 + i)^4 = 12\,500(1 + 0{,}04)^4 =$

$= 14\,623{,}23$ €

b) $C_4 = C\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{16} = 12\,500(1 + 0{,}01)^{16} =$

$= 14\,657{,}23$ €

c) $C_4 = C\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{48} = 12\,500(1 + 0{,}00\widehat{3})^{48} =$

$= 14\,664{,}98$ €

11. $$A = \frac{D \cdot i(1 + i)^{12}}{(1 + i)^{12} - 1} = \frac{2\,400 \cdot 0{,}06 \cdot (1{,}06)^{12}}{1{,}06^{12} - 1} =$$

$= 286{,}26$ €

12. $$D = \frac{A[(1 + i)^5 - 1]}{i(1 + i)^5} = \frac{7\,000 \cdot [(1{,}07)^5 - 1]}{0{,}07 \cdot (1{,}07)^5} =$$

$= 28\,701{,}38$ €

Por tanto, todavía debemos al banco:

$60\,000 - 28\,701{,}38 = 31\,298{,}62$ €

13. $$C_F = A(1 + i)\frac{[(1 + i)^8 - 1]}{i} =$$

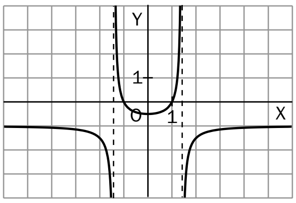
$$= 1\,100 \cdot 1{,}075\frac{[(1{,}075)^8 - 1]}{0{,}075} = 12\,352{,}83 \text{ €}$$

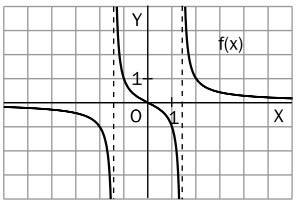
14. $$C_F = A(1 + i)\frac{[(1 + i)^{15} - 1]}{i} =$$

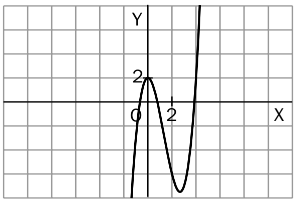
$$= 300 \cdot 1{,}08\frac{[(1{,}08)^{15} - 1]}{0{,}08} = 8\,797{,}28 \text{ €}$$

9 Transformaciones geométricas y funciones

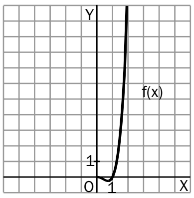
1. A la vista de las gráficas, señala el tipo de simetría, si existe, que tienen las funciones siguientes:

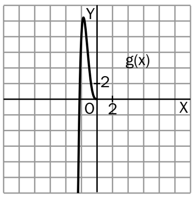
a) 

b) 

c) 

2. Completa las gráficas de las funciones f y g sabiendo que f es simétrica par y g es simétrica impar.





3. Analiza si las funciones siguientes son pares o impares:

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x$

c) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^5}{2} - 3x^3$

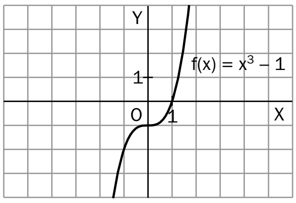
4. Partiendo de la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$, construye la gráfica de las funciones:

a) $g(x) = 1 - x^2$

b) $h(x) = |x^2 - 1|$

5. ¿Son las funciones $f(x) = 2x^3 - 3$ y $g(x) = -2x^3 - 3$ pares entre sí? Razona la respuesta.

6. Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 1$, construye la gráfica de su función recíproca.



7. A partir de la función $f(x) = 2x^2$, dibuja las gráficas y escribe las expresiones algebraicas que resultan de trasladar f:

a) En traslación horizontal, según el vector $\vec{v} = (2, 0)$.

b) En traslación vertical, según el vector $\vec{w} = (0, -3)$.

c) En traslación oblicua, según el vector $\vec{u} = (1, 3)$.

8. La función $f(x) = 2x^2 - 1$ se dilata horizontalmente según la escala x = 200 %, y = 100 %. ¿Cuál es la expresión algebraica de la función resultante?

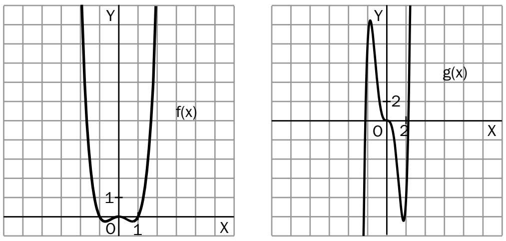
9. La función $f(x) = 1 - x^2$ se dilata verticalmente según la escala x = 100 %, y = 50 %. ¿Cuál es la expresión algebraica de la función resultante?

10. ¿Qué función resulta de dilatar horizontalmente la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$ según la escala x = 100 %, y = 100 %?

SOLUCIONES

1. a) Par b) Impar c) Ni par ni impar

2.

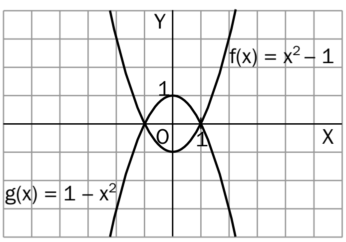


3. a) Par d) Par

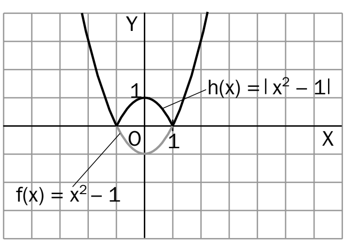
b) Impar e) Ni par ni impar

c) Ni par ni impar f) Impar

4. a)



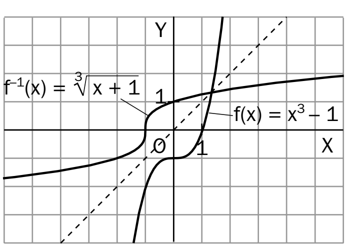
b)



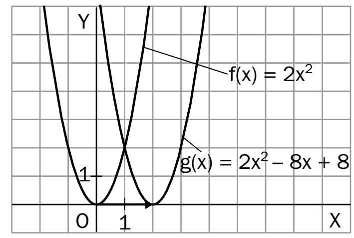
5. $f(-x) = 2(-x)^3 - 3 = -2x^3 - 3 = g(x)$

Por tanto, son pares entre sí.

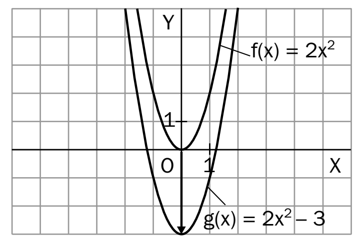
6.



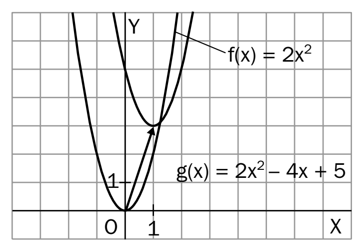
7. a) $g(x) = f(x - 2) = 2(x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$



b) $g(x) = f(x) + (-3) = 2x^2 - 3$



c) $g(x) = f(x - 1) + 3 = 2(x - 1)^2 + 3 =$
$= 2x^2 - 4x + 5$



8. $g(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{x^2}{2} - 1$

9. $g(x) = \dfrac{f(x)}{2} = \dfrac{(1 - x^2)}{2}$

10. La misma función, puesto que en ambos ejes las unidades permanecen constantes.

10 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Calcula:

a) 2^{-4} c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ e) $\sqrt{3^6}$ g) $16^{\frac{3}{4}}$ i) $(0,5)^{-4}$

b) $(-3)^2$ d) 5^0 f) $81^{\frac{1}{4}}$ h) $(-1)^{-1}$ j) $(\sqrt[3]{5^2})^6$

2. Calcula:

a) $\log_3 81$ c) $\log_9 3$ e) $\log_3 \dfrac{1}{3}$ g) $\log_5 \sqrt{5}$ i) $\log 10$

b) $\log_2 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ f) $\log 0{,}01$ h) $\log_2 \sqrt[3]{32}$ j) $\log \sqrt{1\,000}$

3. Completa la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	4	8
2^x								
$\log_2 x$								

a) Construye con los valores obtenidos las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$.

b) ¿Cómo son entre sí ambas gráficas?

c) Indica los dominios y recorridos de f y g.

4. Toma logaritmos en base 2 para calcular: $A = \dfrac{8 \cdot \dfrac{1}{32} \cdot 16 \cdot 2^2}{2^{-3}}$

5. Toma logaritmos decimales en las siguientes expresiones:

a) $A = \dfrac{a^3\, b^4\, c}{d^2}$ b) $B = \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot c^4$

6. Escribe la forma algebraica de A y B en las siguientes expresiones:

a) $\log A = 3 \log x - 5 \log y$ b) $\log B = \dfrac{5 \log x + 3 \log y}{2}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{x+1} = 625$ b) $2^{2x-5} = 8$ c) $3^{x+2} = 9^x$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log (x + 1) = \log (x - 1) + 3$ c) $2 \log x - \log (x + 6) = 0$

9. Utiliza la fórmula de cambio de base y la calculadora para hallar:

a) $\log_3 41$ b) $\log_5 36$

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{1}{16}$

b) 9

c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

d) 1

e) $\sqrt{3^6} = 3^3 = 27$

f) $81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$

g) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

h) $\dfrac{1}{-1} = -1$

i) $0{,}5^{-4} = \dfrac{1}{0{,}5^4} = 16$

j) $(\sqrt[3]{5^2})^6 = 5^4 = 625$

2. a) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

b) $\log_2 1 = = \log_2 2^0 = 0$

c) $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = -4$

e) $\log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

f) $\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$

g) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \dfrac{5}{3}$

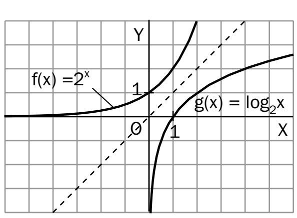
i) $\log 10 = 1$

j) $\log \sqrt{1\,000} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

3.

x	−3	−2	−1	0	1	2	4	8
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	16	256
$\log_2 x$	No existe	No existe	No existe	No existe	0	1	2	3

a)



b) Son simétricas entre sí respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

c) $D(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = (0, +\infty)$; $f(D) = (0, +\infty)$; $g(D) = \mathbb{R}$

4. $\log_2 A = \log_2 \dfrac{8 \cdot \frac{1}{32} \cdot 16 \cdot 2^2}{2^{-3}} = \log_2 \dfrac{16}{2^{-3}} =$

$= \log_2 2^7 \Leftrightarrow A = 2^7 = 128$

5. a) $\log A = \log \dfrac{a^3b^4c}{d^2} = \log (a^3b^4c) - \log (d^2) =$

$= \log a^3 + \log b^4 + \log c - 2 \log d =$

$= 3 \log a + 4 \log b + \log c - 2 \log d$

b) $\log B = \log (\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot c^4) = \log (a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot c^4) =$

$= \dfrac{3}{2} \log a + \dfrac{2}{3} \log b + 4 \log c$

6. a) $\log A = 3 \log x - 5 \log y = \log x^3 - \log y^5 =$

$= \log \dfrac{x^3}{y^5} \Leftrightarrow A = \dfrac{x^3}{y^5}$

b) $\log B = \dfrac{5 \log x + 3 \log y}{2} = \dfrac{\log x^5 + \log y^3}{2} =$

$= \dfrac{\log (x^5y^3)}{2} = \log (x^5y^3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow B = (x^5y^3)^{\frac{1}{2}}$

7. a) $5^{x+1} = 5^4 \Rightarrow x = 3$

b) $2^{2x-5} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $3^{x+2} = 3^{2x} \Rightarrow x = 2$

8. a) $\log_2 x = 3 = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

b) $\log (x+1) = \log (x-1) + \log 10^3 = \log [10^3(x-1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 10^3(x - 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1\,001}{999}$

c) $2 \log x - \log (x+6) = 0 \Leftrightarrow \log x^2 - \log (x+6) = \log 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(x + 6)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

La solución de la ecuación $x = -2$ no es válida, pues no existe $\log -2$.

9. a) $\log_3 41 = \dfrac{\log 41}{\log 3} = 3{,}38$

b) $\log_5 36 = \dfrac{\log 36}{\log 5} = 2{,}23$

11 Funciones periódicas

1. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados:

a) 15° b) 80° c) 125° d) 450° e) −70° f) 540°

2. Expresa en grados los siguientes ángulos medidos en radianes:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{2}$ rad d) $\frac{3\pi}{5}$ rad e) 1,5 rad f) −2 rad

3. Expresa con dos decimales las siguientes razones trigonométricas. Utiliza la calculadora.

a) sen 15°41′ c) cos 639° e) sec $\frac{3\pi}{2}$ rad g) sen $-\frac{\pi}{3}$ rad

b) tg 2,27 rad d) cotg −210°23′15″ f) cosec 0,31 rad h) cos (15°39′ + 34°34′)

4. Razona, sin usar la calculadora, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La tangente de un ángulo del segundo cuadrante es negativa.

b) Si tg $\alpha = \frac{3}{4}$, entonces sen $\alpha = 3$ y cos $\alpha = 4$.

c) El coseno de un ángulo negativo nunca puede ser un número positivo.

d) $(\text{sen}\ \alpha)^2 = \text{sen}^2\ \alpha$

e) $\cos \alpha^2 = \cos^2 \alpha$

f) cos 30° < cos 60°

g) sen $2\alpha = 2$ sen α

h) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

5. Construye una circunferencia goniométrica y razona con su ayuda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

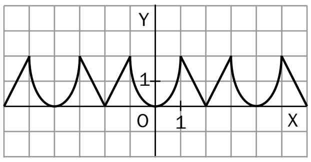
a) sen $(a + \pi) = -$sen a

b) cos $(\pi - a) = $ cos a

c) sen $\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = $ cos a

d) cos $\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = $ sen a

6. Observa la gráfica de la siguiente función en el intervalo [−6, 6] y responde:



a) ¿Cuál es el período de esta función en el intervalo [−6, 6]?

b) ¿Es simétrica? ¿De qué tipo?

c) ¿Qué puedes decir sobre el crecimiento y decrecimiento en [−6, 6]?

7. Indica el período de las siguientes funciones:

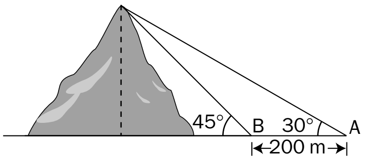
a) $y = 3 \cos 5x$ c) $y = \cos(x + 4)$ e) $y = \text{sen}\ 2x - 3{,}5$

b) $y = \frac{\text{sen}\ x}{2}$ d) $y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ f) $y = 2\ \text{sen}(-3x + 1)$

8. A partir de la gráfica de y = sen x, construye las gráficas de:

a) y = 2 sen x b) y = sen 3x c) y = sen x + 2

9. Desde un punto A situado en la horizontal se ve la cima de una montaña bajo un ángulo de elevación de 30°. Aproximándose 200 metros sobre la horizontal hacia la montaña, se llega a un punto B desde el cual el ángulo de elevación es de 45°. Halla la altura de la montaña.



SOLUCIONES

1. Para pasar de grados a radianes se multiplica por π y se divide por 180.

a) $\frac{\pi}{12}$ rad c) $\frac{25\pi}{36}$ rad e) $\frac{-7\pi}{18}$ rad

b) $\frac{4\pi}{9}$ rad d) $\frac{5\pi}{2}$ rad f) 3π rad

2. Para pasar de radianes a grados se multiplica por 180 y se divide por π.

a) $45°$ c) $90°$ e) $85°56'37''$

b) $60°$ d) $108°$ f) $-114°35'$

3. a) 0,27 d) $-1{,}71$ g) $-0{,}87$

b) $-1{,}19$ e) No existe h) $\cos 50°13' = 0{,}64$

c) 0,16 f) 3,28

4. a) Verdadero. Pertenecen al segundo cuadrante los ángulos comprendidos entre 90° y 180°.

b) Falso. Las funciones sen x y cos x tienen como recorrido $[-1, 1]$.

c) Falso. Contraejemplo: $\cos(-60°) = 0{,}5$.

d) Verdadero. Son dos formas distintas de expresar el cuadrado del sen x.

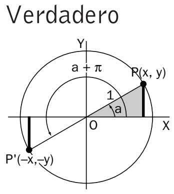
e) Falso. Contraejemplo: si $\alpha = 30°$, $\cos(30°)^2 = \cos 900° = -1$, que es distinto de $\cos^2 30° = (\cos 30°)^2 = (0{,}87)^2$.

f) Falso; $\cos 30° = 0{,}87 > \cos 60° = 0{,}5$.

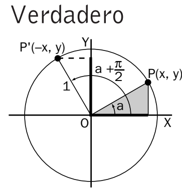
g) Falso. Contraejemplo: $\text{sen}\, 60° = 0{,}87 \neq 2\,\text{sen}\, 30° = 1$.

h) Verdadero, pues $\cos(-\alpha) = \cos(360 - \alpha) = \cos(\alpha)$.

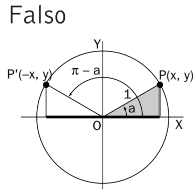
5. a) Verdadero



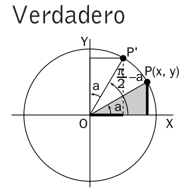
c) Verdadero



b) Falso



d) Verdadero



6. a) El período es 4.

b) La función es simétrica par.

c) Creciente en $[-6, -5]$, $[-4, -3]$, $[-2, -1]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$ y $[4, 5]$; decreciente en $[-5, -4]$, $[-3, -2]$, $[-1, 0]$, $[1, 2]$, $[3, 4]$ y $[5, 6]$.

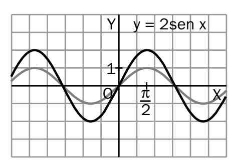
7. $f(x) = a\,\text{sen}\,(bx + c)$ y $g(x) = a\cos(bx + c)$ tienen de período $T = \frac{2\pi}{|b|}$, donde a, b y c son números reales.

a) $T = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$ d) $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 8\pi$

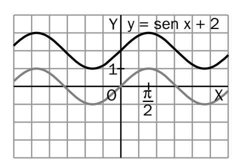
b) $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ e) $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

c) $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ f) $T = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

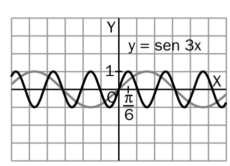
8. a)



c)



b)



9. Sea h la altura de la montaña y x la distancia del punto B al pie de la altura, ambas en metros.

$$\begin{cases} \text{tg}\, 30° = \dfrac{h}{200 + x} \\ \text{tg}\, 45° = \dfrac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = (200 + x)\,\text{tg}\, 30° \\ h = x\,\text{tg}\, 45° \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (200 + x)\,\text{tg}\, 30° = x\,\text{tg}\, 45° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{200 \cdot \text{tg}\, 30°}{(\text{tg}\, 45° - \text{tg}\, 30°)} = 115{,}47$$

$$h = x \cdot \text{tg}\, 45° = 273{,}21$$

Solución: La montaña tiene una altura de 273,21 m.

12 Tendencia y continuidad

1. Considera la sucesión $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Completa la tabla e indica a qué valor se aproximan sus términos:

n	1	2	3	10	100	1 000	10 000
a_n	0,5	0,125					

2. Halla el valor al que se aproximan los términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ b) $a_n = \dfrac{2n + 3}{n - 1}$ c) $a_n = \dfrac{4}{1 - n^2}$

3. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

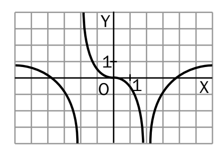
a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + x)$ d) $\lim\limits_{x \to 8} (\sqrt{x + 1} - x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{x^2+1}$

4. A la vista de la gráfica, señala el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

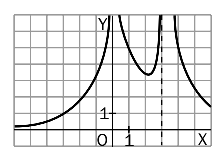
b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



5. A la vista de la gráfica, señala el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x + 3)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

7. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 6}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 20} - 5}$

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^5 + 4x}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x} - x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{2x^3 - 5}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

9. Estudia la continuidad en $x = 2$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Los términos de la sucesión a_n tienden a 0.

n	1	2	3	10	100	1 000	10 000
a_n	0,5	0,125	$0,0\widehat{5}$	0,005	0,00005	0,0000005	0,000000005

2. a) $\lim \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{+\infty + 1} = +\infty$

b) $\lim \dfrac{2n + 3}{n - 1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim \dfrac{2 + \dfrac{3}{n}}{1 - \dfrac{1}{n}} = \dfrac{2 + 0}{1 - 0} = 2$

c) $\lim \dfrac{4}{1 - n^2} = \dfrac{4}{1 - \infty} = \dfrac{4}{-\infty} = 0$

3. a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + x) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to 8} (\sqrt{x + 1} - x) = -5$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{x^2+1} = 2^5 = 32$

4. a) 1 b) $-\infty$ c) 1 d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) 0

5. a) 0 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) 5 f) $+\infty$

6. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 3) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 - 3x^2 + x - 1) = +\infty$

7. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 3}{x - 2} = -4$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} 3x - 2 = -2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0}$

Operación no válida en $\mathbb{R}$. La indeterminación se resuelve calculando los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Coinciden; por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2}{x^2} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 20} - 5} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x - 5)(\sqrt{x + 20} + 5)}{(\sqrt{x + 20} - 5)(\sqrt{x + 20} + 5)} =$

$= \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 20} + 5 = \sqrt{25} + 5 = 10$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 6} = \dfrac{0}{-4} = 0$

8. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{2x^3 - 5} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \dfrac{3}{x}}{2 - \dfrac{5}{x^3}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^5 + 4x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}}{1 + \dfrac{4}{x^4}} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x} - x = \infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{2x^2 + 3x} - x)(\sqrt{2x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{2x^2 + 3x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3x} + x} = \dfrac{\infty}{\infty} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3}{\sqrt{2 + \dfrac{3}{x}} + 1} = \dfrac{+\infty}{\sqrt{2} + 1} = +\infty$

9. a) En $x = 2$ la función no está definida, f no es ni continua ni discontinua en $x = 2$.

b) $f(2) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Discontinua, pues $f(2) = 5 \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

c) $f(2) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Continua, pues $f(2) = 4 = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

13 Tasas de variación y derivadas

1. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = 3x - 4$ en el intervalo $[0, 4]$.

2. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[2, 5]$.

3. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$.

4. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 + x - 5$ en el intervalo $[-1, 3]$.

5. Halla la derivada de la función $f(x) = 4x - 1$ en el punto $x = 2$ utilizando la definición.

6. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, halla $f'(3)$ utilizando la definición.

7. Halla la derivada de la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 0$ utilizando la definición.

8. Halla, aplicando la definición, la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = 3x^2 + 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

e) $f(x) = 2x^3$

f) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

9. ¿Para qué valor de x la derivada de la función $y = 2x^2 - x$ vale 3?

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

11. Halla el punto de la curva $y = 2x^2 + 1$ en el que la recta tangente tiene pendiente $m = 8$.

12. La tabla muestra la evolución de la población mundial entre 1920 y 1980.

Año	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Núm. de habitantes (en millones)	1 810	2 015	2 250	2 515	3 020	3 690	4 450

a) ¿Cuál ha sido el crecimiento de la población en el período 1920-1980?

b) ¿Cuál ha sido el crecimiento de la población en el período 1970-1980?

c) ¿Cuál ha sido el crecimiento medio de la población en el período 1920-1980?

d) ¿Cuál ha sido el crecimiento medio de la población en el período 1970-1980?

e) El crecimiento relativo de la población (TVM), ¿fue mayor entre 1920 y 1980 o entre 1970 y 1980?

SOLUCIONES

1. $TV[0, 4] = f(4) - f(0) = 8 - (-4) = 12$

2. $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = 32 - 5 = 27$

3. $TV[1, 3] = f(3) - f(1) = \frac{7}{9} - 3 = -\frac{20}{9}$

4. $TVM[-1, 3] = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{7 + 5}{4} = 3$

5. $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4(2 + h) - 1 - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4$

6. $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 + 1 - 10}{h} = \lim_{h \to 0} 6 + h = 6$

7. $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h - 2 - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} 2h + 3 = 3$

8. a) $D\,(3x - 1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x + h) - 1 - (3x - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$

b) $D\,(x^2 + 3) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$

c) $D\,(3x^2 + 4) = \lim_{h \to 0} 6x + 3h = 6x$

d) $D\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x + 1)\,(x + h + 1)} = \frac{-1}{(x + 1)^2}$

e) $D\,(2x^3) = \lim_{h \to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2 = 6x^2$

f) $D\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{(x + 1)\,(x + h + 1)} = \frac{2}{(x + 1)^2}$

9. Utilizando las tablas de derivadas se obtiene que la derivada de $y = f(x) = 2x^2 - x$ es:

$y' = 4x - 1$

$y' = 3 \iff 4x - 1 = 3 \iff x = 1$

10. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)\,(x - 2)$.

$f(2) = 2^2 = 4$; $y' = f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

$y - 2 = 4(x - 2)$, de donde $4x - y - 6 = 0$

11. Que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = 2x^2 + 1$ en el punto buscado sea igual a 8 significa que en la abscisa de ese punto la derivada $y' = f'(x)$ vale 8.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} 2h + 4x = 4x$

Se tiene: $4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

El punto buscado tiene de abscisa $x = 2$, por tanto es $(2, f(2))$; es decir, $(2, 9)$.

12. a) El crecimiento es la diferencia entre la población en 1980 y la que había en 1920.

$f(1980) - f(1920) = 2\,640$ millones de habitantes.

b) La población en el período 1970-1980 aumentó en $f(1980) - f(1970) = 760$ millones de habitantes.

c) El crecimiento medio de la población en un período corresponde a la tasa de variación media en dicho período; por tanto:

$TVM[1920, 1980] = \frac{f(1980) - f(1920)}{1980 - 1920} =$

$= \frac{2\,640}{60} = 44$ millones de habitantes/año.

d) $TVM[1970, 1980] = \frac{f(1980) - f(1970)}{1980 - 1970} =$

$= \frac{760}{10} = 76$ millones de habitantes/año.

e) Comparando las TVM en ambos períodos, se concluye que el crecimiento relativo de la población fue mayor en el período 1970-1980.

14 Cálculo de tasas de variación y derivadas

1. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$

b) $D\,(6x^4 - 2x^3 + 5x + 8)$

c) $D\,(7x^5 - 3x^4)$

d) $D\,(5x^3 - 2x^2 + x)$

2. Calcula las siguientes derivadas realizando previamente las operaciones entre polinomios:

a) $D\,(x^3 + 1)\,(x^2 - 3)$

b) $D\,(x + 1)^2$

c) $D\,(3x^5 - 7)\,(2x + 1)$

3. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\sqrt[5]{x^4}$

b) $D\,(x\sqrt{x})$

c) $D\,\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Es preferible pasar antes las raíces a forma potencial.

4. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\left(\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$

b) $D\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right)$

c) $D\left(\dfrac{7}{x + 5}\right)$

d) $D\left(\dfrac{-x}{x + 2}\right)$

5. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(\sqrt{x} + \cos x)$

b) $D\,(x^2 \operatorname{sen} x)$

c) $D\,(\operatorname{sen} x \cos x)$

d) $D\,\operatorname{tg} x$

e) $D\,(x^3 \cos x)$

f) $D\,(7^x \cdot x^2)$

g) $D\,(e^x \cdot 3x^2)$

h) $D\left(\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}\right)$

6. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(x^3 + 3x)^2$

b) $D\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^2$

7. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,[\operatorname{sen}(x^2 + 4x)]$

b) $D\,(\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$

c) $D\,e^{5x}$

d) $D\,L(7x^2)$

e) $D\sqrt{\operatorname{sen} x}$

f) $D\,L\sqrt{x^2 + 3}$

g) $D\,5^{2x-8}$

h) $D\,[\cos(7^x + 4x)]$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \sqrt{2x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) $y = x^2 - 3x + 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

9. Se sabe que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto P(1, 0) y que $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 5$. Calcula a, b y c.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Se puede hallar la recta tangente en $x = 1$? Razónalo.

SOLUCIONES

1. Aplicando las reglas de derivación:

a) $D\,(x^3 - 5x^2 + 4x - 1) = 3x^2 - 10x + 4$

b) $D\,(6x^4 - 2x^3 + 5x + 8) = 24x^3 - 6x^2 + 5$

c) $D\,(7x^5 - 3x^4) = 35x^4 - 12x^3$

d) $D\,(5x^3 - 2x^2 + x) = 15x^2 - 4x + 1$

2. a) $D\,(x^5 - 3x^3 + x^2 - 3) = 5x^4 - 9x^2 + 2x$

b) $D\,(x + 1)^2 = D\,(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2$

c) $D\,(6x^6 + 3x^5 - 14x - 7) = 36x^5 + 15x^4 - 14$

3. a) $D\sqrt[5]{x^4} = D\,(x^{\frac{4}{5}}) = \dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

b) $D\,(x\sqrt{x}) = (x^{\frac{3}{2}}) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

c) $D\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = D\,(x^{1-\frac{2}{3}}) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4. a) $D\left(\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\right) = \dfrac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)\cdot 1}{(x - 1)^2} =$
$= \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

b) $D\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right) = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

c) $D\left(\dfrac{7}{x + 5}\right) = 7\,D\left(\dfrac{1}{x + 5}\right) = -\dfrac{7}{(x + 5)^2}$

d) $D\left(\dfrac{-x}{x + 2}\right) = \dfrac{-2}{(x + 2)^2}$

5. a) $D\,(\sqrt{x} + \cos x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{sen} x$

b) $D\,(x^2 \operatorname{sen} x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

c) $D\,(\operatorname{sen} x \cos x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

d) $D\operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

e) $D\,(x^3 \cos x) = 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$

f) $D\,(7^x \cdot x^2) = x^2 \cdot 7^x \cdot L7 + 7^x 2x$

g) $D\,(e^x \cdot 3x^2) = e^x \cdot 3x^2 + e^x \cdot 6x = 3xe^x(x + 2)$

h) $D\left(\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}\right) =$
$= \dfrac{1 + (1 + x)\cos x + (x - 1)\operatorname{sen} x}{(x + \cos x)^2}$

6. a) $D(x^3 + 3x)^2 = 2(x^3 + 3x)\,(3x^2 + 3)$

b) $D\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$

7. a) $D\,(\operatorname{sen}(x^2 + 4x)) = \cos(x^2 + 4x)\cdot(2x + 4) =$
$= (2x + 4)\cos(x^2 + 4x)$

b) $D\,[\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x] = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos^2 x +$
$+ \operatorname{sen}^2 x\,(2\cos x\,(-\operatorname{sen} x)) =$
$= 2\operatorname{sen} x \cos^3 x - 2\cos x \operatorname{sen}^3 x$

c) $D\,e^{5x} = 5e^{5x}$

d) $D\,L(7x^2) = D\,(L7 + Lx^2) = \dfrac{1}{x^2}\cdot 2x = \dfrac{2}{x}$

e) $D\sqrt{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\cdot\cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

f) $D\,L\sqrt{x^2 + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}}\cdot 2x = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

g) $D\,5^{2x-8} = 5^{2x-8}\cdot L5 \cdot 2 = 2L5 \cdot 5^{2x-8}$

h) $D\,[\cos(7^x + 4x)] = -(7^x \cdot L7 + 4)\operatorname{sen}(7^x + 4x)$

8. a) La recta tangente buscada es:

$y - f(2) = f'(2)\,(x - 2)$

$f(2) = 2;\ y' = f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2}$

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

b) La recta tangente buscada es:

$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$

$f(1) = -1;\ y' = f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(1) = -1$

$y + 1 = -1(x - 1)$, de donde $x + y = 0$

9. Como pasa por (1, 0) se tiene que $a + b + c = 0$.

$f'(x) = 2ax + b$; por tanto:
$f'(1) = 2a + b = 1,\ f'(2) = 4a + b = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 1 \\ 4a + b = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{array}$$

10. a) La recta tangente buscada es:

$y - f(2) = f'(2)\,(x - 2)$

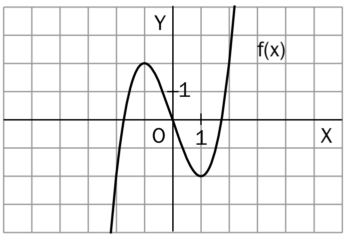
$f(2) = 3;\ y' = f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2$

$y - 3 = -2(x - 2)$, de donde $2x + y - 7 =$
0

b) No, puesto que para $x = 1$ no existe la curva.

15 Monotonía y curvatura

1. A la vista de la gráfica de la función f, determina:



a) Los máximos y mínimos de la función.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Los puntos de inflexión.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad.

2. Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 12x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = L(x + 1)$

3. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

4. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

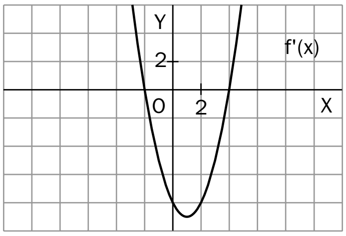
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

5. Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6$ b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

6. Dada la función $f(x) = x^2 + bx + c$, halla b y c para que f tenga un mínimo en $(2, -9)$.

7. La gráfica representa la función derivada de una función f.



Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función f.

8. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ y calcula:

a) Su dominio.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

d) Los puntos de inflexión.

e) Los intervalos de concavidad y convexidad.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 9$ en su punto de inflexión.

SOLUCIONES

1. a) $(-1, 2)$ es un máximo y $(1, -2)$ es un mínimo.

b) La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 1)$.

c) $(0, 0)$, pues f pasa de cóncava a convexa.

d) Convexa en $(0, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.

2. a) $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f'(x) = 0 \iff x = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow (-2, 16)$ es máximo.

$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow (2, -16)$ es mínimo.

b) Derivada primera: $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

$f''(x) = \dfrac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(-1) = \dfrac{6}{4} > 0 \Rightarrow \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ es mínimo.

$f''(1) = -\dfrac{6}{4} < 0 \Rightarrow \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ es máximo.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 1} \neq 0$. La función no tiene extremos.

3. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$

f es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ no puede afirmarse nada.

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$

El signo de la primera derivada coincide con el signo del numerador $(-2x)$.

f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$; es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. En $x = \pm 1$ no puede afirmarse nada.

4. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

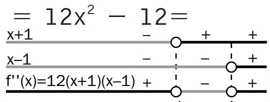
$f''(x) = 0 \iff x = 1$

En $x = 1$ la función pasa de cóncava a convexa, luego $(1, 4)$ es punto de inflexión.

b) $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12 =$

$= 12(x + 1)(x - 1)$

$f''(x) = 0 \iff x = \pm 1$



En $x = -1$ la función pasa de convexa a cóncava, luego $(-1, -5)$ es punto de inflexión.

En $x = 1$ la función pasa de cóncava a convexa, luego $(1, -5)$ es punto de inflexión.

c) $f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2 - 4)^2}$, $f''(x) = \dfrac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$

$f''(x) = 0 \iff 24x^2 + 32 = 0$. Esto no sucede nunca, la función no tiene puntos de inflexión.

5. a) $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ f es siempre convexa.

b) $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$, $f''(x) = 6x + 4 = 6\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

f es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$; convexa en $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

El punto $\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-119}{27}\right)$ es de inflexión.

c) $D(f) = [-1, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4(\sqrt{x+1})^3} < 0$

en todo su dominio; f es cóncava en $[-1, +\infty)$.

6. $\left.\begin{aligned} f(2) &= -9 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4 + 2b + c &= -9 \\ 4 + b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= -4 \\ c &= -5 \end{aligned}$

7. Si $x < -2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$.

Si $-2 < x < 4$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-2, 4)$.

Si $x > 4$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(4, +\infty)$.

En el punto de abscisa $x = -2$, f alcanza un máximo, pues en él f pasa de creciente a decreciente, y en el de abscisa $x = 4$, f alcanza un mínimo, pues en este punto f pasa de decreciente a creciente.

8. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \iff (x - 1)(x + 1) = 0 \iff x = \pm 1$

f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

c) En $(-1, -2)$ la función alcanza un máximo.

En $(1, 2)$ alcanza un mínimo.

d) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$; f no tiene puntos de inflexión.

e) Si $x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-\infty, 0)$.

Si $x > 0$, $f''(x) > 0$ y $\Rightarrow$ f es convexa en $(0, +\infty)$.

9. $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$

$f''(x) = 0 \iff x = 2$

El punto de abscisa $x = 2$ es de inflexión pues en él f pasa de cóncava a convexa.

Recta tangente $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 7 = -12(x - 2) \Rightarrow 12x + y - 17 = 0$

16 Estudio y representación de funciones

1. Considera la función $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

a) Calcula su dominio.

b) Halla los puntos de corte con los ejes coordenados.

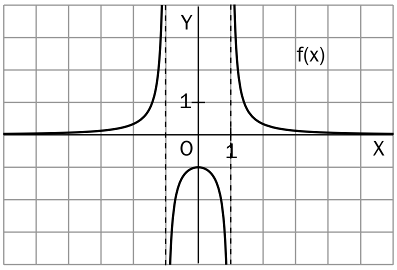
c) Determina sus extremos.

d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Estudia la curvatura.

f) Dibuja su gráfica.

2. A la vista de la siguiente gráfica, determina:



a) El dominio de la función.

b) Las asíntotas.

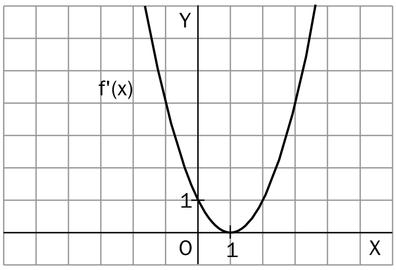
c) Los intervalos de monotonía.

d) Los extremos.

e) La curvatura.

f) Los puntos de inflexión.

3. La siguiente gráfica representa la función derivada de una función f:



a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) ¿Puede tener f asíntotas verticales?

c) ¿Dónde crece y dónde decrece f?

d) ¿Cuáles son los máximos y los mínimos de f?

4. Representa la función $f(x) = x - x^3$.

5. Representa la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

6. Representa la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$.

SOLUCIONES

1. a) D (f) = $\mathbb{R}$

b) (−5, 0), (2, 0) y (0, 10)

c) $f'(x) = -2x - 3$

$f'(x) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2}$

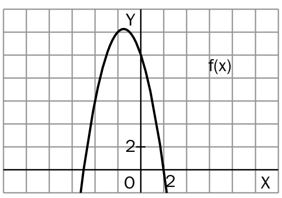
$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$ máximo.

d) $f'(x) = -2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

f creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

e) f es siempre cóncava ya que $f''(x) = -2 < 0$.

f)



2. a) D (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son las asíntotas verticales. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal. La función no tiene asíntotas oblicuas.

c) f es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$, y es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.

d) Tiene un máximo en $(0, -1)$. No tiene mínimos.

e) f es convexa en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, y es cóncava en $(-1, 1)$.

f) No tiene puntos de inflexión.

3. a) D (f) = $\mathbb{R}$, pues su función derivada existe siempre, luego f existe y es derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) No, por ser derivable en $\mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.

c) Creciente en $(-\infty, 1)$, pues $f' > 0$, y decreciente en $(1, +\infty)$, pues $f' < 0$.

d) No tiene extremos. El posible extremo sería el punto (1, 0), pues $f'(1) = 0$, pero se trata de un punto de inflexión ya que $f''(1) = 0$ (la tangente a f' en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal) y la función cambia de curvatura (a su izquierda $f'' < 0$ por ser f' decreciente y a su derecha $f'' > 0$ por ser f' creciente).

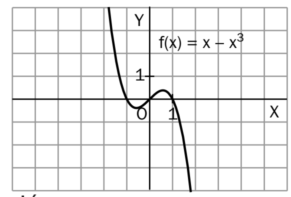
4. D (f) = $\mathbb{R}$; $f'(x) = 1 - 3x^2 = -3\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$f''(x) = -6x$; $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ es máximo.

$f''\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ es mínimo.

f es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ y es creciente en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.



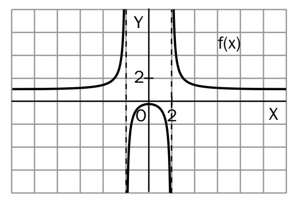
$f''(x) = 0 \iff x = 0$

f es convexa en $(-\infty, 0)$;

f es cóncava en $(0, +\infty)$.

El punto (0, 0) es de inflexión.

5. D (f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$



$f'(x) = -\dfrac{10x}{(x^2 - 4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{30x^2 + 40}{(x^2 - 4)^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, 0)$, y es decreciente en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$; $f''(0) < 0 \Rightarrow \left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$ es un máximo.

$f''(x) = 0 \iff 30x^2 + 40 = 0$, lo que es imposible. No hay puntos de inflexión.

Si $x < -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en $(-\infty, -2)$.

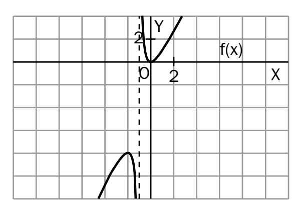
Si $-2 < x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-2, 2)$.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(2, +\infty)$.

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ es asíntota horizontal.

6. D (x) = $\mathbb{R} - \{-1\}$



$f'(x) = \dfrac{2x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{4}{(x + 1)^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0, x = -2$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow (-2, -8)$ es un máximo.

$f''(0) > 0 \Rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y es decreciente en $(-2, -1)$ y en $(-1, 0)$.

$f''(x) = 0 \iff 4 = 0$, lo que es imposible. No hay puntos de inflexión.

Si $x < -1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-\infty, -1)$.

Si $x > -1$, $f''(x) > 0$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(-1, +\infty)$.

La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

No hay asíntotas horizontales.

La recta $y = 2x - 2$ es asíntota oblicua.

17 Distribuciones unidimensionales y bidimensionales

1. Una zapatería vende en un día 50 pares de zapatos de señora de los siguientes números:

x_i	35	36	37	38	39	40
f_i	6	12	17	9	3	3

a) Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución.

b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la distribución.

c) ¿Cuántos pares de zapatos hay en el intervalo $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$?

d) Halla el porcentaje de datos que hay en el intervalo $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$

2. Representa el diagrama de dispersión y describe cualquier relación que observes entre las variables de la serie bidimensional siguiente:

Dureza del acero	36	41	42	43	44	45	47	50
‰ de níquel	25	27	28	29	30	32	33	35

3. Representa el diagrama de dispersión y calcula el coeficiente de correlación que corresponde a los datos de la siguiente tabla:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	2	3	1	4	6	7	5

4. Dada la distribución bidimensional:

X	15	17	18	19	23	24	25	26	29
Y	14	18	17	19	23	23	25	24	28

a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X.

b) Representa conjuntamente la recta anterior y el diagrama de dispersión.

c) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

d) Estima el valor correspondiente a la variable Y para $X = 27$.

5. Las tallas, en pulgadas, de 12 padres y sus primogénitos están dadas por la siguiente tabla:

Padre	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Hijo	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) Calcula la recta de regresión de los hijos con respecto a los padres.

c) ¿Qué talla tendrá un hijo si la del padre es de 72 pulgadas?

6. Una prueba de acceso a un puesto de trabajo consta de dos exámenes. Ambos se califican sobre cuatro puntos. Se presentan 100 personas y se obtienen los siguientes resultados:

Examen 1	3	4	3	3	2	1	2	3	0	2	4
Examen 2	3	3	4	2	3	4	1	0	1	2	4
Número de personas	8	6	8	7	10	3	7	8	12	15	16

a) Construye una tabla equivalente de doble entrada.

b) Calcula el coeficiente de correlación y explica el tipo de dependencia que existe entre las calificaciones de ambos exámenes.

SOLUCIONES

1. a) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{50} x_i f_i}{N} = \dfrac{1\,850}{50} = 37$

Mediana: 37 Moda: 37

b) Rango: $40 - 35 = 5$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N} = \frac{84}{50} = 1,68$$

$S = \sqrt{1,68} = 1,3$

c) $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (35,7; 38,3)$

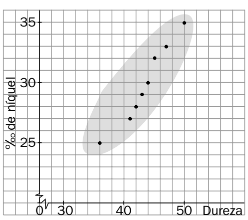
En este intervalo hay 38 pares de zapatos.

d) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (34,4; 39,6)$

En este intervalo hay 47 pares de zapatos.

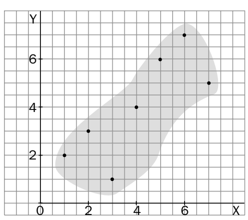
Es decir, el 94 % de las ventas.

2.



Relación lineal positiva muy fuerte.

3. a)



$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i f_i}{N} = \frac{28}{7} = 4$$

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i y_i f_i}{N} - \bar{x}\bar{y} = \frac{134}{7} - 16 = \frac{22}{7}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{140}{7} - 16} = \sqrt{4} = 2$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 f_i}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{140}{7} - 16} = \sqrt{4} = 2$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = 0,79$$

4. a) La recta de regresión de Y sobre X es:

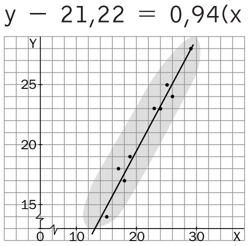
$y - \bar{y} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$; $\bar{x} = 21,78$; $\bar{y} = 21,22$

$$S_{xy} = \frac{4\,325}{9} - 21,78 \cdot 21,22 = 18,39$$

$$S_x^2 = \frac{4\,446}{9} - 21,78^2 = 19,63$$

$y - 21,22 = 0,94(x - 21,78)$

b)



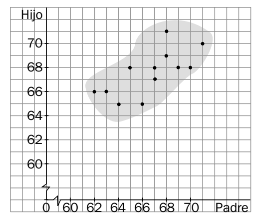
c) $S_y = \sqrt{\dfrac{4\,213}{9} - 21,22^2} = 4,22$;

$S_x = \sqrt{19,63} = 4,43$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{18,38}{4,43 \cdot 4,22} = 0,98$$

d) $y(27) = 21,22 + 0,94 \cdot 5,22 = 26,1298$

5. a)



b) Sean H y P las variables que miden las tallas de los hijos y de los padres, respectivamente.

$h - \bar{h} = \dfrac{S_{ph}}{S_p^2}(p - \bar{p})$; $\bar{p} = 66,67$; $\bar{h} = 67,58$

$$S_{ph} = \frac{54\,107}{12} - 66,67 \cdot 67,58 = 3,36$$

$$S_p^2 = \frac{53\,418}{12} - 66,67^2 = 6,61$$

$h - 67,58 = 0,51(p - 66,67)$

c) Como $h(72) = 70,3$, se concluye que la talla del hijo es de 70,3 pulgadas.

6. a)

Y \ X	0	1	2	3	4
0	0	0	0	8	0
1	12	0	7	0	0
2	0	0	15	7	0
3	0	0	10	8	6
4	0	3	0	8	16

b) $\bar{x} = \dfrac{248}{100} = 2,48$; $\bar{y} = \dfrac{243}{100} = 2,43$

$$S_{xy} = \frac{684}{100} - 6,03 = 0,81$$

$$S_x = \sqrt{\frac{762}{100} - 2,48^2} = \sqrt{1,47} = 1,21$$

$$S_y = \sqrt{7,55 - 2,43^2} = \sqrt{165} = 1,28$$

$$r = \frac{0,81}{1,21 \cdot 1,28} = 0,52$$

No existe una dependencia fuerte entre las calificaciones de ambos exámenes.

18 Distribuciones discretas. Distribución binomial

1. Se lanzan dos dados perfectos. Se define la variable aleatoria X del siguiente modo: X (a, b) = a · b, donde (a, b) identifica los resultados que muestran los dados. Halla el recorrido de dicha variable aleatoria.

2. Se lanza una moneda tres veces y se define la variable aleatoria X que asigna a cada punto del espacio muestral el número de caras consecutivas obtenido. Indica:

a) El recorrido de la variable.

b) La función de probabilidad y su representación gráfica.

3. Una variable aleatoria tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$X = x_i$	3	4	5	6	7	8
$p(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	m	$\frac{1}{18}$

a) Calcula el valor de m.

b) Calcula la media y la desviación típica.

4. La variable aleatoria X toma los valores 1, 2, 3, ..., $n - 1$ y n con probabilidad $p(X = i) = \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$.

a) Representa la función de probabilidad.

b) Calcula $p(X < 5)$ y $p(X \geqslant 8)$.

5. Se lanza un dado corriente seis veces y se considera éxito la obtención de 5 ó 6.

a) ¿Este experimento se rige por el modelo binomial? Justifícalo.

b) Calcula la probabilidad de obtener exactamente tres éxitos.

c) Describe el suceso fracaso.

d) Calcula la probabilidad de obtener exactamente 4 fracasos.

6. El 30 % de los clientes de una sucursal bancaria no tienen tarjeta de crédito. Si se eligen cuatro clientes al azar, calcula:

a) Probabilidad de que exactamente dos no tengan tarjeta de crédito.

b) Probabilidad de que exactamente dos tengan tarjeta de crédito.

c) Probabilidad de que los cuatro tengan tarjeta de crédito.

7. Un jugador de baloncesto lanza todos los días 100 tiros libres para entrenarse. Durante los últimos 30 días la distribución de fallos ha sido:

Número de fallos	0	1	2	3
Número de días	10	12	6	2

Ajusta una distribución binomial a estos datos.

SOLUCIONES

1. Tanto a como b pueden tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6; por lo tanto:
Recorrido de X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}

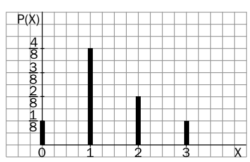
2.

Suceso	CCC	CCX	CXC	XCC	CXX	XCX	XXC	XXX
Probabilidad	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Valor de X	3	2	1	2	1	1	1	0

a) Recorrido de X = {0, 1, 2, 3}

b)

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$



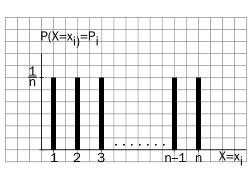
3. a) $\Sigma pi = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{5}{18} + m + \frac{1}{18} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 1 - \frac{15}{18} = \frac{1}{6}$

b) $\mu = \Sigma\, x_i p_i = \frac{11}{2} = 5,5$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\Sigma\, x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{1,69} = 1,3$

4. a)



b) $p(X < 5) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) +$
$+ p(X = 4) = 4 \cdot \frac{1}{n} = \frac{4}{n}$

$p(X \geqslant 8) = 1 - p(X < 7) = 1 - \frac{6}{n} = \frac{n - 6}{n}$

5. a) Sí, pues:

— En cada realización solo hay dos posibles resultados: Éxito o fracaso.

— El resultado obtenido en cada tirada es independiente de los resultados anteriores.

— La probabilidad de éxito es constante y por tanto no varía de una tirada a otra.

La distribución que indica el número de éxitos es: $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, p(«éxito») = p(5) + p(6) = $\frac{1}{3}$

b) $p(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,2195$

c) El suceso fracaso consiste en obtener 1, 2, 3 ó 4.

d) Obtener exactamente 4 fracasos es conseguir exactamente 2 éxitos.

$p(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2} = 0,3292$

6. Si se considera como suceso éxito que un cliente no tenga tarjeta de crédito, la variable aleatoria X que indica el número de clientes sin tarjeta de crédito sigue una distribución B (4, 0,3).

a) $p(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 = 0,2646$

b) Es igual a la probabilidad de que exactamente dos clientes no la tengan; por tanto, es 0,2646.

c) $p(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^4 = 0,2401$

7. El ajuste es posible, pues:

— En cada lanzamiento solo son posibles dos resultados: encesta o no encesta.

— Hay independencia. Que enceste o no en un lanzamiento no presupone nada para el siguiente.

— La probabilidad del suceso «no encestar» es constante en cada lanzamiento.

La que mejor se ajusta será la que tenga como media μ, la media observada $\overline{x}$.

$\overline{x} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{30} = 1$

$\mu = n\,p \Leftrightarrow 1 = 100p \Rightarrow p = \frac{1}{100}$

La binomial será: $B\left(30, \frac{1}{100}\right)$.

19 Distribuciones continuas. Distribución normal

1. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica.

b) Comprueba que es una función de densidad.

2. Se considera la tabla de frecuencias agrupadas:

Intervalo	[60-63)	[63-66)	[66-69)	[69-72)	[72-75)
Frecuencia	5	18	42	27	8

a) Dibuja el histograma y calcula la media y la desviación típica.

b) Calcula la probabilidad de que una variable normal, con media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado anterior, sea mayor que 69.

3. Los pesos de los niños recién nacidos en una determinada comunidad están normalmente distribuidos, con media 3,5 kilogramos y desviación típica 0,2 kilogramos.

Usa las indicaciones de probabilidad de las distribuciones normales y calcula los intervalos que contienen los pesos del 68, 95 y 99 % de los recién nacidos en la comunidad.

4. Se sabe que Z es una variable aleatoria que se distribuye según una N(0, 1). Calcula:

a) $p(Z \leqslant 1{,}25)$ b) $p(Z \geqslant 0{,}03)$ c) $p(Z \leqslant -1{,}87)$ d) $p(-1{,}96 \leqslant Z < 1{,}25)$

5. Determina el valor o los valores de la variable aleatoria Z en cada uno de los siguientes casos, en los que el área dada se refiere a una distribución N(0, 1):

a) Área entre 0 y $z = 0{,}3770$ b) Área a la izquierda de $z = 0{,}8621$

6. En una prueba de matemáticas, sobre 10 puntos, la media de las calificaciones ha sido 6,7 y la desviación típica 1,2. Sabiendo que las calificaciones son números enteros y están normalmente distribuidas, determina el porcentaje de calificaciones iguales a 8 puntos.

7. Se sabe que un determinado modelo de magnetoscopio tiene una duración media de 15 años con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo una distribución normal de la duración, calcula la probabilidad de que uno de estos magnetoscopios dure más de 12 años.

8. Una máquina produce botones, de los que el 10 % son defectuosos. Se toma al azar una muestra de 400 botones. Calcula la probabilidad de que en la muestra:

a) Como mucho 30 botones sean defectuosos.

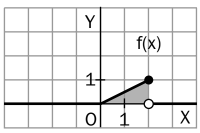
b) Haya entre 30 y 50 botones defectuosos.

9. La siguiente tabla muestra los resultados del estudio de la variable «consumo diario de leche maternizada en niños de dos meses»:

Consumo (g)	[45, 50)	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)	[80, 85)
Número de niños	13	32	63	56	60	44	29	19

Halla la probabilidad de que un niño, elegido al azar, consuma como máximo 60 gramos de leche al día.

SOLUCIONES

1. a) 

b) $f(x) \geqslant 0$ y el área encerrada bajo la curva y el eje OX es igual a la unidad.

2. a) $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{N} = \dfrac{6\,795}{100} = 67{,}95$

$S^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 f_i}{100} - \overline{x}^2 = 4\,625{,}73 - 4\,617{,}2025 =$
$= 8{,}5275;\ S = \sqrt{S^2} = 2{,}92$

b) Sea X con distribución: N(67,95; 2,92).

$p(X > 69) = p\left(Z > \dfrac{69 - 67{,}95}{2{,}92}\right) =$
$= p(Z > 0{,}36) = 1 - p(Z \leqslant 0{,}36) = 0{,}3594$

3. — En el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (3{,}3; 3{,}7)$ están el 68,26 % de los individuos; por lo tanto, aproximadamente el 68 % de los recién nacidos tendrán pesos comprendidos entre 3,3 y 3,7 kg.

En el intervalo $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (3{,}1; 3{,}9)$ están el 95,44 % de las observaciones; el 95 % de los recién nacidos pesarán entre 3,1 y 3,9 kg.

— En el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (2{,}9; 4{,}1)$ está el 99,74 % de los individuos; prácticamente todos los recién nacidos pesarán entre 2,9 y 4,1 kg.

4. a) $p(Z \leqslant 1{,}25) = 0{,}8944$

b) $p(Z \geqslant 0{,}03) = 1 - p(Z \leqslant 0{,}03) = 0{,}4880$

c) $p(Z \leqslant -1{,}87) = p(Z > 1{,}87) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}87) = 1 - 0{,}9693 = 0{,}0307$

d) $p(-1{,}96 \leqslant Z < 1{,}25) =$
$= p(Z \leqslant 1{,}25) - p(Z \leqslant -1{,}96) =$
$= p(Z \leqslant 1{,}25) - [1 - p(Z \leqslant 1{,}96)] =$
$= 0{,}8944 - [1 - 0{,}9750] = = 0{,}8694$

5. a) $0{,}3770 = p(0 < Z \leqslant z) = p(Z \leqslant z) - p(Z \leqslant 0) =$
$= p(Z \leqslant z) - 0{,}5 \Rightarrow p(Z \leqslant z) = 0{,}8770 \Rightarrow z = 1{,}16$

b) $0{,}8621 = p(Z \leqslant z) \Rightarrow z = 1{,}09$

6. La variable aleatoria discreta X: «Puntuación en la prueba de matemáticas» tiene como recorrido: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sin embargo, el enunciado indica que se haga un tratamiento continuo del problema, lo que equivale a agrupar las puntuaciones en intervalos de clase y trabajar con la distribución normal N(6,7; 1,2).

Intervalos: $[-0{,}5;\ 0{,}5)$, $[0{,}5;\ 1{,}5)$, $[1{,}5;\ 2{,}5)$, $[2{,}5;\ 3{,}5)$, $[3{,}5;\ 4{,}5)$, $[4{,}5;\ 5{,}5)$, $[5{,}5;\ 6{,}5)$, $[6{,}5;\ 7{,}5)$, $[7{,}5;\ 8{,}5)$, $[8{,}5;\ 9{,}5)$ y $[9{,}5;\ 10{,}5)$.

$p(7{,}5 \leqslant X \leqslant 8{,}5) = p(X \leqslant 8{,}5) - p(X \leqslant 7{,}5) =$
$= p(Z \leqslant -1{,}5) - p(Z \leqslant 0{,}67) = 0{,}9332 - 0{,}7486 =$
$= 0{,}1846$

El porcentaje pedido es 18,46 %.

7. La variable «duración del magnetoscopio» sigue una distribución: N(15, 0,5)

$p(X > 12) = 1 - p(X \leqslant 12) = 1 - p\left(Z \leqslant \dfrac{12 - 15}{0{,}5}\right) =$
$= 1 - p(Z \leqslant -6) = 1 - [1 - p(Z \leqslant 6)] = 1 - [1 - 1] = 1$

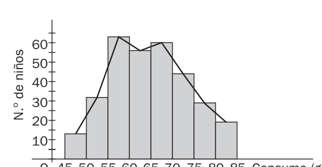
Teóricamente, es seguro que el magnetoscopio dure más de 12 años, si bien, debido a que la normal es una curva asintótica, siempre hay un margen de error que podría provocar que el magnetoscopio no durara más de 12 años, aunque esto sería rarísimo. En la práctica es casi seguro que dure más de 12 años.

8. La variable X: «Número de botones defectuosos» sigue una distribución B(400; 0,1).

Como $np = 40 \geqslant 5$ y $nq = 360 \geqslant 5$, se aproxima la variable X por la variable X′: N(40, 6).

a) $p(X \leqslant 30) = p(X' \leqslant 30{,}5) =$
$= p\left(Z \leqslant \dfrac{30{,}5 - 40}{6}\right) = p(Z \leqslant -1{,}58) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}58) = 1 - 0{,}9429 = 0{,}0571$

b) $p(30 \leqslant X \leqslant 50) = p(29{,}5 < X' \leqslant 50{,}5) =$
$= p\left(\dfrac{29{,}5 - 40}{6} \leqslant Z \leqslant \dfrac{50{,}5 - 40}{6}\right) =$
$= p(-1{,}75 \leqslant Z \leqslant 1{,}75) = 1 - 2p(Z > 1{,}75)$
$= 1 - 2[1 - p(Z \leqslant 1{,}75)] = 1 - 2(1 - 0{,}9599) =$
$= 1 - 2 \cdot 0{,}0401 = 0{,}9198$

9. 

En vista de que recuerdan la curva normal, se procede al ajuste por una normal tomando como x_i la marca de clase del intervalo i-ésimo.

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{N} = \dfrac{20\,475}{316} = 64{,}8$

$S^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 f_i}{100} - x^2 = \dfrac{1\,352\,725}{100} - 4\,199{,}04 = 81{,}74$

$S = \sqrt{S^2} = 9{,}04$

La normal buscada es N(64,8; 9,04).

$p(X \leqslant 60) = p\left(Z \leqslant \dfrac{60 - 64{,}8}{9{,}04}\right) = p(Z \leqslant -0{,}53) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 0{,}53) = 1 - 0{,}7019 = 0{,}2981$

La probabilidad pedida es 0,2981.