TEMA 8:
INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

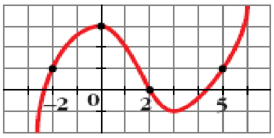
Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira.

Página 204

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:**



a) [–2, 0]

b) [0, 2]

c) [2, 5]

a) $\text{T.V.M. } [-2, 0] = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$

b) $\text{T.V.M. } [0, 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - 3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

c) $\text{T.V.M. } [2, 5] = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{1 - 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

2 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

☛ ***Si la T.V.M. es positiva, la función crece.***

$\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

a) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \to$ Decrece

b) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \to$ Decrece

c) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \to$ Crece

d) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \to$ Crece

3 **Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo [2, 2 + h].**

$\text{T.V.M. } [2, 2 + h] = \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$

4 **Comprueba que la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$ es igual a $-h + 3$.**

Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos [1, 2], [1; 1,5], utilizando la expresión anterior.

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} =$$

$$= 3 - h = -h + 3$$

T.V.M. [1, 2] = 2

T.V.M. [1; 1,5] = 2,5

5 **Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4] y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

6 **Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo:**

$$f(x) = \frac{2x - 3}{5}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{\dfrac{2(-2 + h) - 3}{5} - \dfrac{7}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4 + 2h - 3 - 7}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{\dfrac{2(3 + h) - 3}{5} - \dfrac{3}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - 3 - 3}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

7 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h + 6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h) + 1)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h + 3)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h + 12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+h+2} - \dfrac{1}{3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - h - 3}{3(h+3)h} = -\dfrac{1}{9}$

8 **Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x-3)^2$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.**

$f'(x) = 2(x-3)$

$f'(1) = -4; \quad f'(3) = 0$

9 **Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$.**

$f'(x) = 2x - 5; \quad m = f'(-2) = -9$

10 **Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = 4x - x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$f'(x) = 4 - 2x; \quad f'(2) = 0$

11 **Comprueba que la función $y = x^2 - 5x + 1$ tiene un punto de tangente horizontal en $x = 2,5$.**

$f'(x) = 2x - 5 = 0 \rightarrow x = 2,5$

12 **Comprueba, utilizando la definición, que la función derivada de las siguientes funciones es la que se indica en cada caso:**

a) $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

b) $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

c) $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{5x + 5h - 5x}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{5h}{h} = 5$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{7h^2 + 14xh}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{h(7h + 14x)}{h} = 14x$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh + h}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1$

d) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{x+h} - \dfrac{3}{x}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3x - 3x - 3h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-3h}{x(x+h)}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{-3h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-3}{x(x+h)} = \dfrac{-3}{x^2}$

13 **La derivada de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$ es $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Utilizando la derivada, responde:**

a) ¿Cuál es la ecuación de la tangente a f en el punto de abscisa $x = 1$?

b) ¿En qué puntos tiene f tangente horizontal?

c) ¿Es creciente o decreciente en $x = -1$?

a) $f'(1) = -9$; $f(1) = -2$

Ecuación de la tangente: $y = -9(x - 1) - 2$

b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x(x - 4) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 4$

Puntos: $(0, 3)$ y $(4, -29)$

c) $f'(-1) = 3 + 12 > 0 \;\Rightarrow\;$ Es creciente.

14 **Sabiendo que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, responde:**

a) ¿Cuál es la ecuación de la tangente en $x = 1$?

b) ¿Tiene f puntos de tangente horizontal?

c) ¿Es creciente o decreciente en $x = 4$?

a) $m = f'(1) = \dfrac{1}{2}$; $g(1) = 1$

La recta es: $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) No, puesto que $f'(x) \neq 0$

c) $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4} > 0 \rightarrow$ Es creciente en $x = 4$.

15 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, de la que conocemos su derivada $y' = 6x^2 - 6x$.**

$y' = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$. Puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

16 $y = 2x^3 + 3x^2 - 6;\ x = 1$

$y' = 6x^2 + 6x;\quad y'(1) = 12$

17 $y = \cos(2x + \pi);\ x = 0$

$y' = -2\,sen(2x + \pi);\quad y'(0) = 0$

18 $y = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2};\ x = -\dfrac{17}{3}$

$y' = \dfrac{1}{3};\quad y'\left(-\dfrac{17}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Página 205

19 $y = \dfrac{1}{7x + 1};\ x = 0$

$y' = \dfrac{-7}{(7x+1)^2};\quad y'(0) = -7$

20 $y = sen\,\frac{x}{2} + cos\,\frac{x}{2};\;\; x = \pi$

$y' = \frac{1}{2}\left(cos\,\frac{x}{2} - sen\,\frac{x}{2}\right);\quad y'(\pi) = -\frac{1}{2}$

21 $y = \frac{2}{(x+3)^3};\;\; x = -1$

$y = 2(x+3)^{-3} \;\rightarrow\; y' = -6(x+3)^{-4} = \frac{-6}{(x+3)^4}$

$y'(-1) = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$

22 $y = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2};\;\; x = 2$

$y' = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2};\quad y'(2) = \frac{23}{2}$

23 $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}};\;\; x = 8$

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}};\quad y'(8) = -\frac{1}{16}$

24 $y = 3\,sen(2x-\pi);\;\; x = \frac{\pi}{2}$

$y' = 6\,cos(2x-\pi);\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$

25 $y = (5x-2)^3;\;\; x = \frac{1}{5}$

$y' = 15(5x-2)^2;\quad y'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$

26 $y = \frac{x+5}{x-5};\;\; x = 3$

$y' = \frac{-10}{(x-5)^2};\quad y'(3) = -\frac{5}{2}$

27 $y = x + sen\,x;\;\; x = \pi$

$y' = 1 + cos\,x;\quad y'(\pi) = 0$

28 $y = x\,cos\,x;\;\; x = \frac{3\pi}{2}$

$y' = cos\,x - x\,sen\,x;\quad y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

Halla la función derivada de estas funciones:

29 a) $y = 3 + 2\, sen\, x \cos x$ b) $y = (x^2 - 3)^3$

a) $y' = 2(\cos^2 x - sen^2 x)$ b) $y' = 6x(x^2 - 3)^2$

30 a) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $y' = 1 \quad (\text{si } \; x \neq 0)$ b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

31 a) $y = \sqrt[3]{(x + 6)^2}$ b) $y = sen\, \sqrt{x}$

a) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x + 6)}}$ b) $y' = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

32 a) $y = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $y = 7^{x+1}$

a) $y = -3(1 - x^2)^{-1/2}; \quad y' = \dfrac{3}{2}(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

b) $y' = 7^{x+1} \cdot \ln 7$

33 a) $y = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}$ b) $y = \ln 3x$

a) $y' = \dfrac{-1}{3x^2} + \dfrac{1}{3}$ b) $y' = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$

34 a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ b) $y = e^{2x} \cdot tg\, x$

a) $y' = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

b) $y' = 2e^{2x}\, tg\, x + e^{2x}(1 + tg^2 x) = e^{2x}(2\, tg\, x + 1 + tg^2 x) = e^{2x}(1 + tg\, x)^2$

35 a) $y = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$ b) $y = \cos^2 x$

a) $y' = \dfrac{3x^2(x - 1)^2 - x^3 \cdot 2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \dfrac{3x^2(x - 1) - 2x^3}{(x - 1)^3} = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x - 1)^3} =$

$= \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x - 1)^3}$

b) $y' = 2 \cos x\,(-sen\, x) = -2\, sen\, x \cos x$

36 **a)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **b)** $y = x^3 \cdot e^{1-x}$

a) $y' = \dfrac{3x^2(x^2-4) - 2x \cdot x^3}{(x^2-4)^2} = \dfrac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

b) $y' = 3x^2 \cdot e^{1-x} - x^3 \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(3x^2 - x^3) = x^2 \cdot e^{1-x}(3-x)$

37 **a)** $y = sen\,\dfrac{3\pi}{2}$ **b)** $y = log\,\dfrac{x^2}{3-x}$

a) $y' = 0$

b) $y = log\,x^2 - log\,(3-x) = 2\,log\,x - log\,(3-x)$

$y' = \dfrac{2}{x\,ln\,10} + \dfrac{1}{(3-x)\,ln\,10}$

38 **a)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{ln\,x}$

a) $y' = \dfrac{(3x^2+2)(x^2+1) - 2x(x^3+2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$

b) $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{ln\,x}}$

PARA RESOLVER

39

Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde. Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?

Depreciación: $[0, 2] \rightarrow 9\,000$ €

$[4, 6] \rightarrow 3\,500$ €

$[8, 10] \rightarrow 1\,500$ €

La depreciación no es constante.

40 **Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:**

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ **b)** $y = x^3 - 3x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$. Punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$. Puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

41 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$y' = 2x - 5;\quad m = y'(2) = -1,\ y(2) = 0$

La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$

42 **Escribe la ecuación de la tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.**

$y' = -2x + 2;\quad m = y'(-1) = 4,\ y(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$

43 **Escribe la ecuación de la tangente a $y = x^2 + 4x + 1$, cuya pendiente sea igual a 2.**

$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1;\ y(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$

44 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en $x = 0$.**

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};\quad m = y'(0) = \frac{1}{2},\ y(0) = 1$

La recta es $y = \frac{1}{2}x + 1$

45 **La tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[3, 3 + h]$ es igual a $\frac{2 - 3h}{h + 1}$. ¿Cuál es el crecimiento de esa función en $x = 3$?**

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2 - 3h}{h + 1} = 2$

46 **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.**

☛ ***La pendiente de la recta es el coeficiente de x cuando la y está despejada.***

$y' = 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$. Puntos: $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

Rectas: $y = 6\left(x + \sqrt{3}\right),\ y = 6\left(x - \sqrt{3}\right)$

47 **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Puntos de corte con el eje de abscisas: $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -2$

Puntos (2, 0) y (–2, 0)

$$y' = -2x, \quad y'(2) = -4, \quad y'(-2) = 4$$

Las rectas son:
- En $x = -2$, $y = 4x + 8$
- En $x = 2$, $y = -4x + 8$

Página 206

48 **Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 3.$

Puntos (–1, 4) y (3, –28).

49 **¿En qué puntos de $y = 1/x$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante? ¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?**

$y' = -\dfrac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = -1,\ x = 1.$ Puntos (–1, –1) y (1, 1).

No existe ningún punto de tangente horizontal, pues $y' = \dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

50 **a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x - 8$ en cualquier punto?**

b) ¿Cuánto ha de valer x para que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

a) $y' = 2$

b) $y' = 2x - 6 = 2 \rightarrow x = 4$

c) En el punto (4, –3).

51 **¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?**

$y' = 3x^2 - 4 = 8 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

Puntos (–2, 0) y (2, 0).

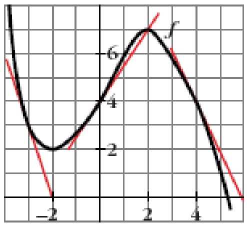
52 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x = 0,\ x = 2$$

En (0, 0), $y = -2x$

En (2, 4), $y = -2(x - 2) + 4 = -2x + 8$

53 **Halla f' en los puntos de abscisas –3, 0 y 4.**



☛ ***Halla las pendientes de las tangentes trazadas en esos puntos.***

$f'(-3) = -3, \quad f'(0) = \frac{3}{2}, \quad f'(4) = -2$

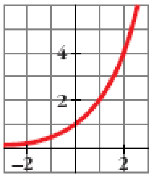
54 **Indica, en la gráfica del ejercicio anterior, los puntos en los que la derivada es cero.**

En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

$f'(x) = 0$ en $(-2, 2)$ y en $(2, 7)$.

En $x = 1$ la derivada es positiva. En $x = 3$ es negativa.

55 **¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?**



Compara los valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(0)$.

No, pues es creciente.

$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$

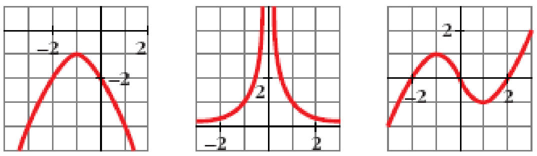
56 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

☛ ***Halla la pendiente de esa recta y ten en cuenta su relación con la derivada.***

La recta tangente es $y = \frac{4x + 1}{3}$; su pendiente es $\frac{4}{3} = f'(2)$

$f(2) = 3$

57 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.**



☛ ***Observa su crecimiento y decrecimiento. La primera crece si $x < -1$.***

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

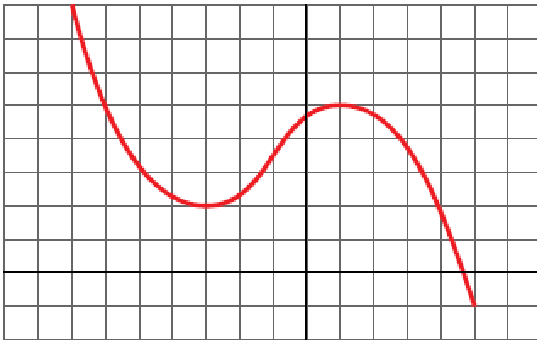
58 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:**

- **Es continua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Tiene tangente horizontal en (–3, 2) y en (1, 5).**

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.



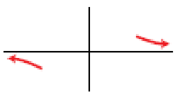
59 **De una función polinómica sabemos que:**

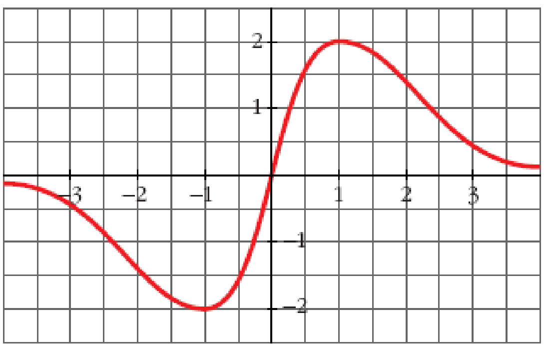
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

60 **Representa la función continua $y = f(x)$ de la que sabemos:**

- **En los puntos (–1, –2) y (1, 2) la tangente es horizontal.**
- **Sus ramas infinitas son así:**





61 **Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?**

$y'(x) = 3(x-1)^2$: $y(0) = -1 \to$ pasa por $(0, -1)$

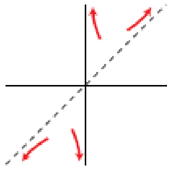
$y(1) = 0 \to$ pasa por $(1, 0)$

$y(2) = 1 \to$ pasa por $(2, 1)$

$y'(1) = 0$

El punto $(1, 0)$ no es ni máximo ni mínimo.

62 **Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la de la derecha. Represéntala.**



$y = x + \dfrac{1}{x}$

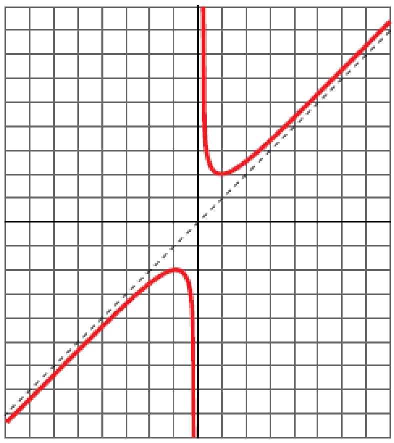
$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x = -1, \ x = 1$

Puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$



Página 207

63 **Comprueba que la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$:**

- **Tiene derivada nula en $(0, 0)$.**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**
- **Posición de la curva respecto a la asíntota:**

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

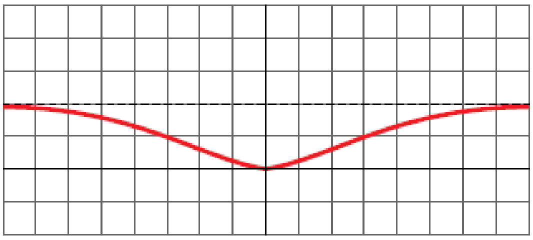
  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

Represéntala.

- $y'(x) = \dfrac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $y'(0) = 0; \;\; y(0) = 0$

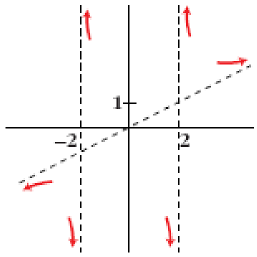
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

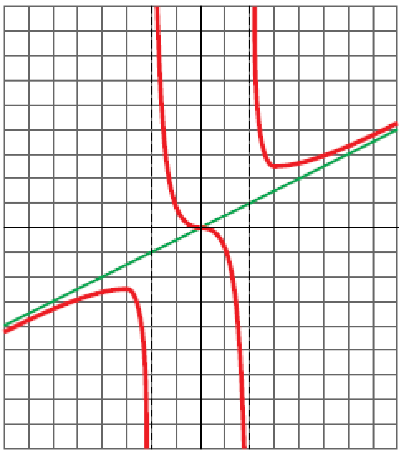


64 Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos de tangente horizontal:

$$\left(-3, -\frac{5}{2}\right) \;\; (0, 0) \;\; \text{y} \;\; \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas.





65 En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos de tangente horizontal y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos.

Represéntalas:

a) $y = x^3 - 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$

d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$

f) $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

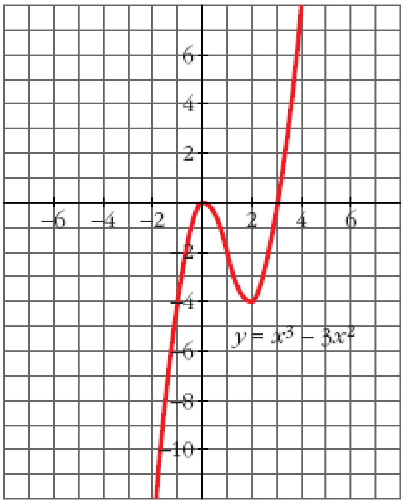
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



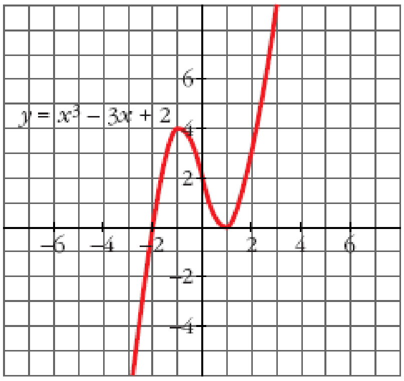
b) $y' = 3x^2 - 3$

$y'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

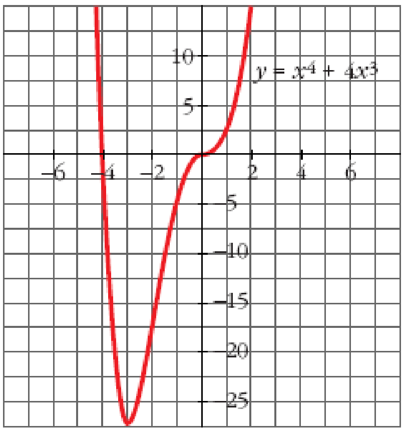


c) $y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



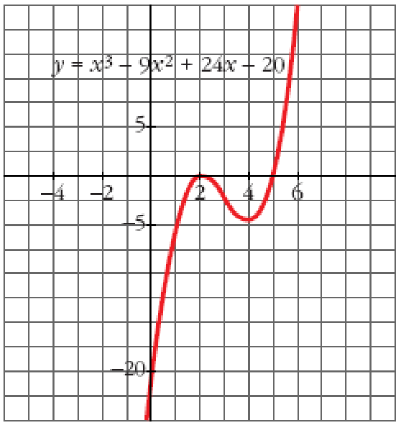
d) $y' = 3x^2 - 18x + 24; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

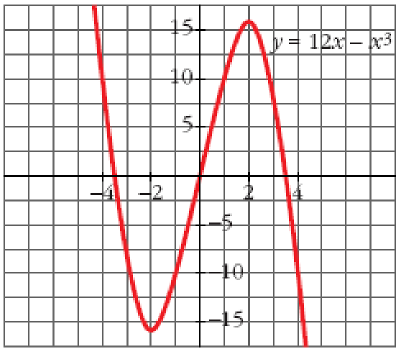


e) $y' = 12 - 3x^2; \quad y'(x) = 0 \iff x = \pm 2$

$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2, 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

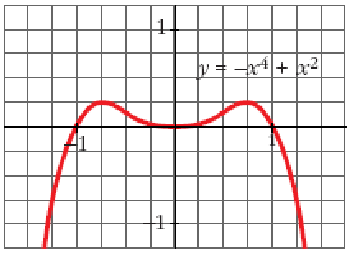
$$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



f) $y'(x) = -4x^3 + 2x; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

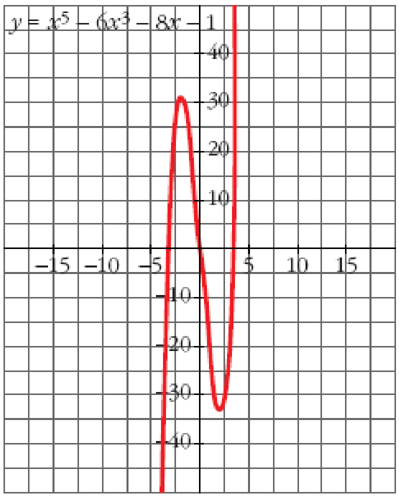


g) $y' = 5x^4 - 18x^2 - 8; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

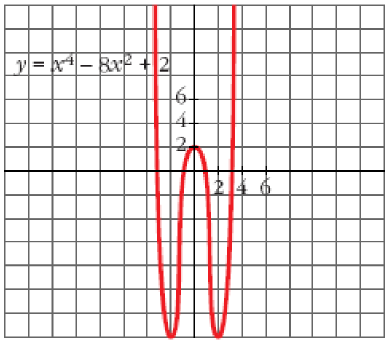


h) $y' = 4x^3 - 16x$; $\quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0,\ 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2,\ -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2,\ -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



66 **Representa estas funciones hallando los puntos de tangente horizontal y estudiando sus ramas infinitas:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x + 5)^2}$ **f)** $y = \dfrac{2x^2}{x + 2}$

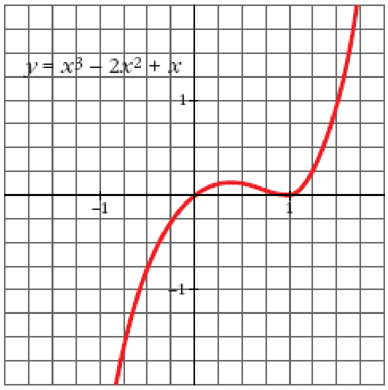
a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}, \quad x = 1$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{27}\right),\ (1,\ 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



b) $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

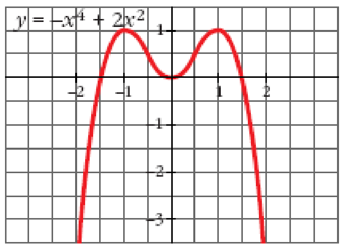
$\rightarrow x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

$(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$ y $(1,\ 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

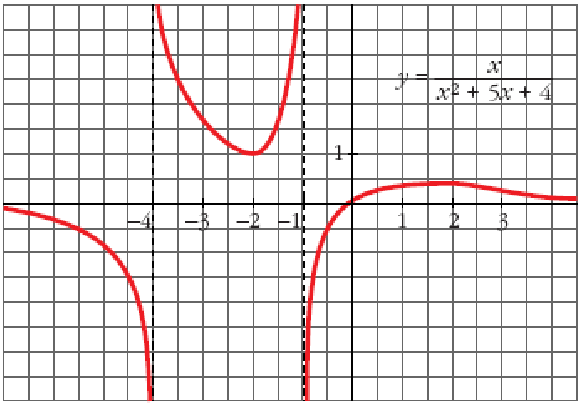


c) $y' = \dfrac{x^2+5x+4-x(2x+5)}{(x^2+5x+4)^2} = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+5x+4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 2,\;\; x = -2$

Puntos de tangente horizontal: $(-2,\ 1)$, $\left(2,\ \dfrac{1}{9}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$



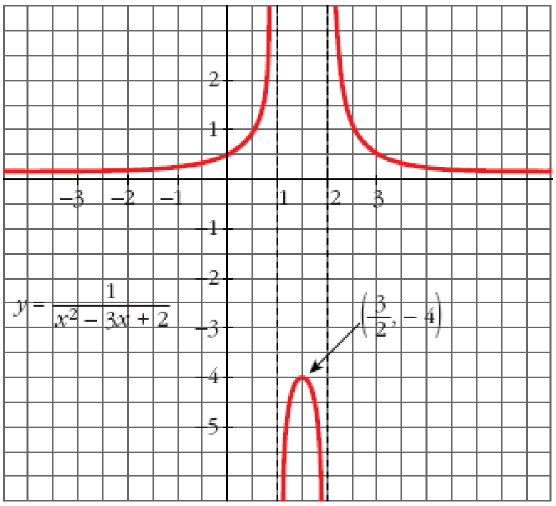
d) $y' = \dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3}{2}$

Puntos de tangente horizontal:

$\left(\dfrac{3}{2},\ -4\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

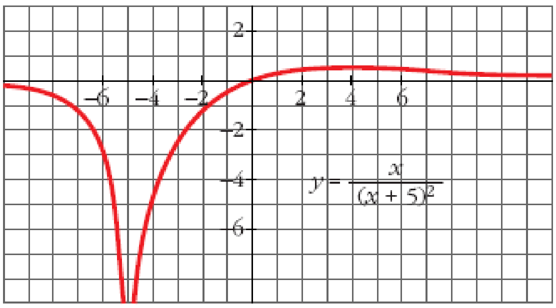


e) $y' = \dfrac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} =$

$= \dfrac{5-x}{(x+5)^3} = 0 \;\rightarrow\; x = 5$

Puntos de tangente horizontal:

$\left(5,\ \dfrac{1}{20}\right)$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

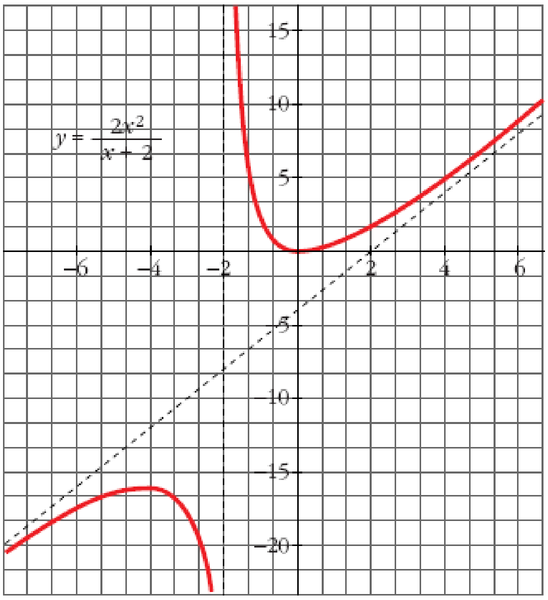
f) $y' = \dfrac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, \; x = -4$

Puntos de tangente horizontal:

$(-4, -16), (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 2x - 4$

(asíntota oblicua)



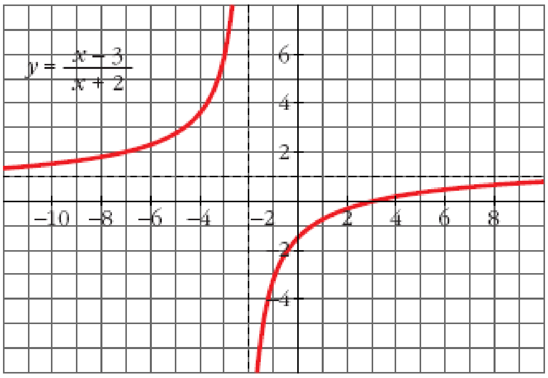
67 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

a) $y' = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son:

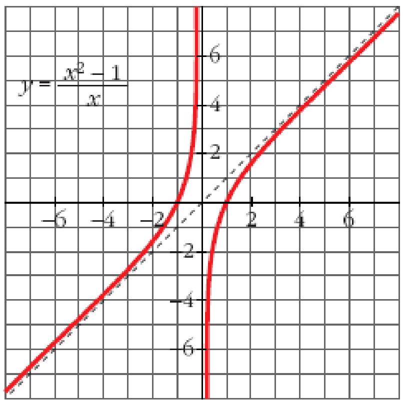
$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$



b) $y' = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

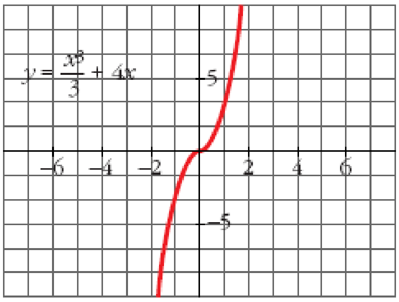
Los puntos de corte son:

$(1, 0)$, $(-1, 0)$



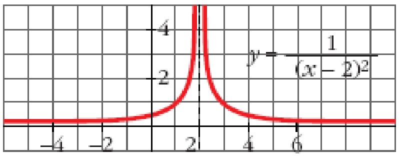
c) $y' = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es: $(0, 0)$



d) $y' = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$



68 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x + 2}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

h) $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

i) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

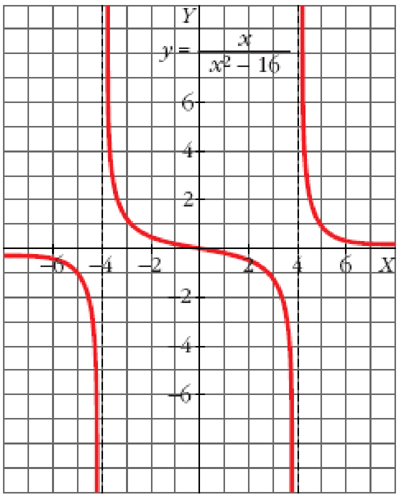
j) $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

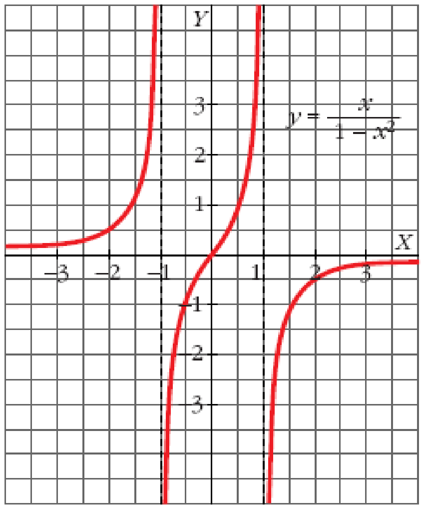


b) $y' = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

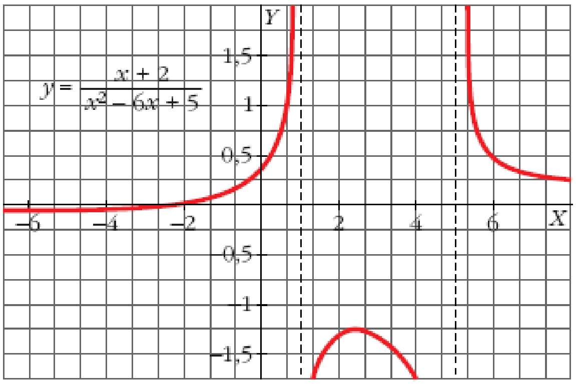
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-6,58;\ -0,052)$, $(2,58;\ -1,197)$



d) $y' = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

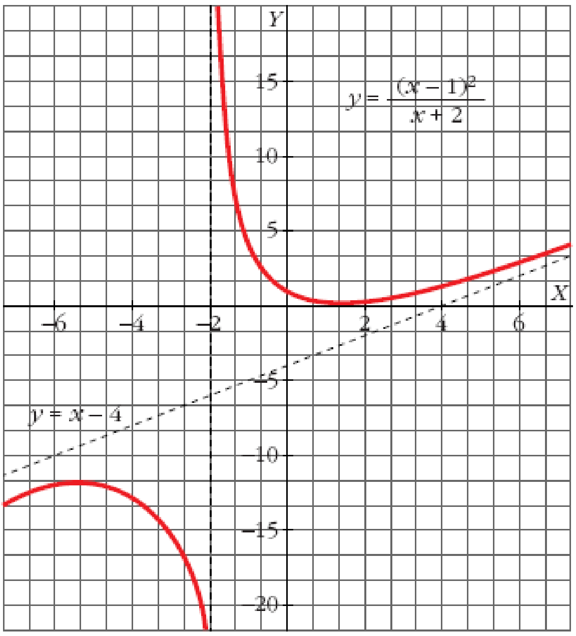
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, 12)$



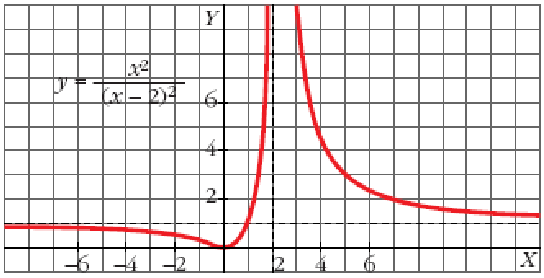
h) $y' = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



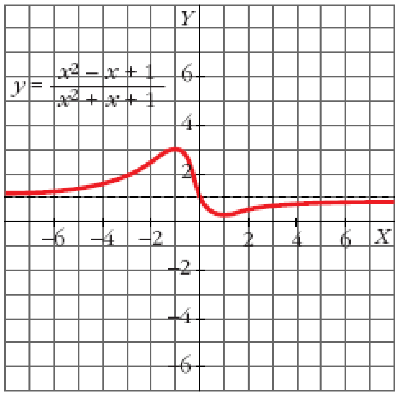
i) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), \ (-1, 3)$$

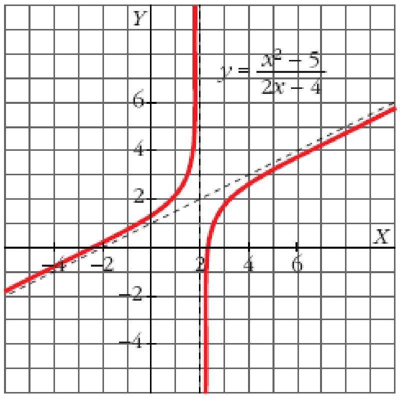


j) $y' = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x-4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



69 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.**

Llama a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y ten en cuenta que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ y $f'(2) = 0$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \ \rightarrow \ 1 = c \\ f(2) = -1 \ \rightarrow \ -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \ \rightarrow \ 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

70 **Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

$f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$

Punto (–3, 2).

71 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

72 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow y' = 6x - 2 \\ y = x^2 + 6x \rightarrow y' = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \Rightarrow x = 2$$

Para $y = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$$

Para $y = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$$

73 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

Página 208

74 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = 3^{x^2+1}$

b) $y = 5^{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

d) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

e) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

f) $y = \cos^3(2x + 1)$

a) $y' = 3^{x^2+1} \cdot 2x \cdot ln\, 3$

b) $y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot ln\, 5$

c) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $y' = \dfrac{ln\, x - x \cdot 1/x}{(ln\, x)^2} = \dfrac{(ln\, x) - 1}{ln^2\, x}$

e) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\, x}} \cdot cos\, x = \dfrac{cos\, x}{2\sqrt{sen\, x}}$

f) $y' = 3\, cos^2(2x+1) \cdot (-sen\,(2x+1)) \cdot 2 = -6\, cos^2\,(2x+1) \cdot sen\,(2x+1)$

75 **Aplica las propiedades de los logaritmos para derivar las siguientes funciones:**

a) $y = ln\, \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $y = ln \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

c) $y = ln\, x\, e^{-x}$

d) $y = log\, \dfrac{(3x-5)^3}{x}$

e) $y = log\,(tg\, x)^2$

f) $y = ln\, x^x$

a) $y = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $y = \dfrac{1}{2}\,[ln\, x - ln\,(x^2+1)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

c) $y = ln\, x + ln\, e^{-x} = ln\, x - x$

$$y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $y = 3\, log\,(3x-5) - log\, x$

$$y' = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\, 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\, 10} = \frac{1}{ln\, 10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\, 10} \cdot \frac{9x - 3x + 5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\, 10\,(3x^2-5x)}$$

e) $y = 2\ log\ (tg\ x)$

$$y' = 2 \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{2(1 + tg^2\ x)}{tg\ x \cdot ln\ 10}$$

f) $y = x\ ln\ x$

$$y' = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

76 **Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?**

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ x = 1,\ x = 3$

$f'(x) > 0 \ \rightarrow\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \ \rightarrow$ Intervalos de crecimiento.

$f'(x) < 0 \ \rightarrow\ (1, 3) \ \rightarrow$ Intervalo de decrecimiento.

Máximo en $(1, 8)$ y mínimo en $(3, 4)$.

77 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^3 - 18x + 1$.**

$f'(x) = 9x^2 - 18 = 9(x^2 - 2)$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \ \rightarrow\ (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \ \rightarrow\ f(x)$ creciente

$f'(x) < 0 \ \rightarrow\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ \rightarrow\ f(x)$ decreciente

78 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de estas funciones analizando el signo de su derivada:**

a) $y = \dfrac{x - 3}{5}$ **b)** $y = x^2 - 5x + 3$

c) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4}$ **d)** $y = 1 + 2x - x^2$

e) $y = x^3$ **f)** $y = (x + 1)^4$

g) $y = (2 - x)^5$ **h)** $y = (3 - x)^3$

a) $y' = \dfrac{1}{5}$. Creciente para todo x.

b) $y' = 2x - 5$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$. Crece en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

c) $y' = \dfrac{3x - 1}{2}$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$. Crece en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) $y' = 2 - 2x$. Crece en $(-\infty, 1)$. Decrece en $(1, +\infty)$.

e) $y' = 3x^2$. Creciente para todo $x \neq 0$.

f) $y' = 4(x + 1)^3$. Decrece en $(-\infty, -1)$. Crece en $(-1, +\infty)$.

g) $y' = -5(2 - x)^4$. Decreciente para todo $x \neq 2$.

h) $y' = 3(3 - x)^2 \cdot (-1) = -3(3 - x)^2$; $y' < 0$ para $x \neq 3$; $y' = 0$ en $x = 3$.

La función es decreciente.