

EXAMEN DERIVADAS

1.- Definición de función derivada de una función.

Utilizando la definición, calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 5x + 7$ y halla la pendiente de la tangente a esta curva en el punto de abscisa $x=-1$. (2 puntos)

2.- Dibuja una función que tenga derivada nula en $x=-1$ y $x=1$, derivada negativa en el intervalo $(-1,1)$ y positiva para cualquier otro valor de x . (1 punto)

2.- Halla las derivadas de las siguientes funciones: (5 puntos)

a) $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$

b) $y = \sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x}$

c) $y = \ln \left[\frac{x-3}{x+3} \right]$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1}$

e) $y = (2x - \sqrt{x})^2$

3.- Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (2 puntos)

SOLUCIONES

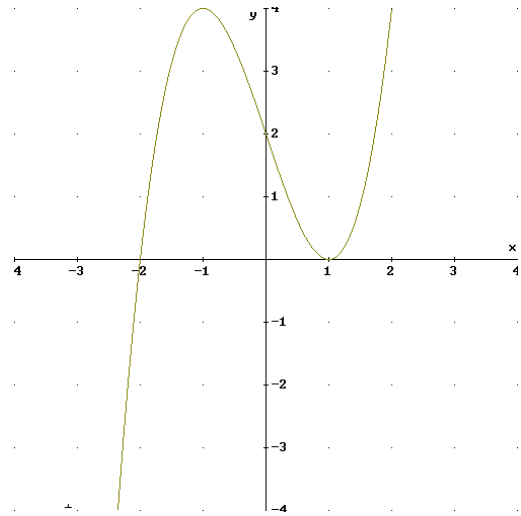
1.- $f(x) = x^2 - 5x + 7$ La función derivada es $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de

donde:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (x^2 - 5x + 7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 5x - 5h - x^2 + 5x - 7}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5 \end{aligned}$$

La pendiente de la tangente en $x=-1$ será $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$

2.- Una función que cumpla las características pedidas, tendrá que ser decreciente (derivada negativa) en el intervalo $(-1,1)$ y creciente en el resto. Por lo tanto, tendrá un máximo en -1 y un mínimo en 1 , por ejemplo la gráfica de la derecha cumple las condiciones.



3.- a) $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(6x^2 - 6x) \cdot 5x - (2x^3 - 3x^2 + 2) \cdot 5}{(5x)^2} = \frac{30x^3 - 30x^2 - 10x^3 + 15x^2 - 10}{25x^2} = \\ &= \frac{20x^3 - 15x^2 - 10}{25x^2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{5x^2} \end{aligned}$$

b) $y = \sqrt{\cos x - \sin x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} \cdot (-\sin x - \cos x) = -\frac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}}$

c) $y = \ln \left[\frac{x-3}{x+3} \right]$ $y' = \frac{1}{\frac{x-3}{x+3}} \cdot \frac{1 \cdot (x+3) - (x-3) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x+3 - x+3}{\frac{x-3}{x+3} \cdot (x+3)^2} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{6}{x^2 - 9}$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1}$

$$y' = (2x + 3) \cdot e^{-2x+1} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1} \cdot (-2)$$

$$y' = (2x + 3) \cdot e^{x^2} + (-2x^2 - 6x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2} (-2x^2 - 4x + 3)$$

$$\text{e) } y = (2x - \sqrt{x})^2 \quad y' = 2(2x - \sqrt{x}) \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 2(2x - \sqrt{x}) \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{(2x - \sqrt{x})(4\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} - 2x - 4x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(8x - 1)\sqrt{x} - 6x}{\sqrt{x}}$$

4.- $y = x^2 + x + 1$ tangente paralela a $y = 3x + 7$, esto significa que tiene la misma pendiente, que es 3 (coeficiente de la x).

Luego, hallaremos la derivada e igualaremos a 3:

$y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, luego la recta tangente es en el punto de abscisa 1,

hallemos la ordenada: $y = 1^2 + 1 + 1 = 3$

Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 3 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 3 \Rightarrow y = 3x$