TEMA 10: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL

Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira.

Página 253

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) 2 ases. **b) Ningún as.**

c) Algún as. **d) Sólo un as.**

a) $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$

c) $1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26}$

d) $2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39} = \frac{12}{65}$

2 **Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras que salen. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Tres caras. **b) Una cara.**

c) Más de una cara.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{dos caras}] + P[\text{tres caras}] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3 **En un examen hay que contestar a 2 temas elegidos al azar entre 30. Un alumno ha estudiado solo 12 de los 30 temas. Halla la probabilidad de que:**

a) El alumno haya estudiado los dos temas elegidos.

b) El alumno solo haya estudiado uno de los temas elegidos.

c) Ninguno de los temas elegidos haya sido estudiado por el alumno.

a) $P[\text{sepa el 1º y el 2º}] = P[\text{sepa el 1º}] \cdot P[\text{sepa el 2º/sabía el 1º}] =$

$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0{,}15$$

b) $P[\text{solo uno}] = 2 \cdot P[\text{sepa el 1º y no el 2º}] = 2 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{72}{145} = 0{,}50$

c) $P[\text{ninguno}] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0{,}35$

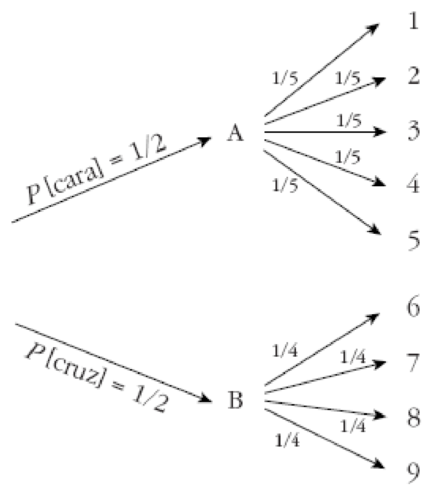
4 **En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda; si sale cara, se extrae una bola de la urna A, y si sale cruz, se extrae una moneda de la urna B. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:**

a) La que lleva el número 5.

b) La que lleva el número 8.

c) Lleve un número par.

Hacemos un diagrama en árbol para calcular fácilmente las probabilidades:



a) $P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P[8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) $P[\text{par}] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

5 **Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Hacemos 2 extracciones con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) 2 bolas verdes.

b) Ninguna bola verde.

c) Una bola verde.

¿Cuáles serían las probabilidades si no hubiera reemplazamiento?

Con reemplazamiento:

a) $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}04$ b) $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}64$ c) $2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}32$

Sin reemplazamiento:

a) $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}0\widehat{2}$ b) $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0{,}6\widehat{2}$ c) $2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = 0{,}3\widehat{5}$

6 **Extraemos al azar una ficha de un dominó normal (28 fichas) y sumamos los puntos de sus dos mitades.**

Calcula la probabilidad de que la suma de puntos sea 6.

Hay 4 fichas en las que la suma de puntos es 6:

0–6 1–5 2–4 3–3

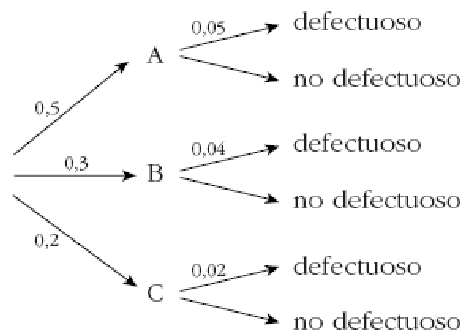
El total de fichas es 28, luego la probabilidad pedida es:

$$\frac{4}{28} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$$

7 **Una fábrica tiene tres máquinas que fabrican tornillos. La máquina A produce el 50% del total de tornillos, la máquina B el 30% y la C el 20%. De la máquina A salen un 5% de tornillos defectuosos, de la B un 4% y de la C un 2%.**

Calcula la probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P\,[\text{defectuoso}] = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}02 = 0{,}041$$

Distribuciones de probabilidad

8 **Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros:**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

$0{,}1 + 0{,}3 + P[2] + 0{,}1 = 1 \;\rightarrow\; P[2] = 0{,}5$

x_i	p_i	$x_i p_i$	$p_i x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
		$\Sigma x_i p_i = 1{,}6$	$\Sigma p_i x_i^2 = 3{,}2$

$\mu = \Sigma\, x_i p_i = 1{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}2 - 1{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

9 **Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2).**

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

a)

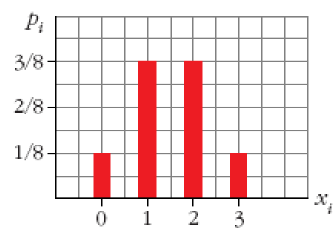
x_i	0	1	2
p_i	$\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39}$	$2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39}$	$\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}$

b) $\mu = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}42$

10 **Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras obtenidas. Haz una tabla con las probabilidades, represéntala gráficamente y calcula la media y la desviación típica.**

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\mu = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}87$



11 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2..., 10, 11 y 12 con probabilidades distintas.**

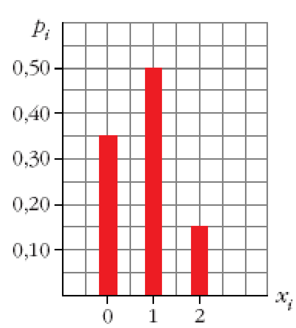
Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

$\mu = 6$; $\sigma = 3$

12 **Un alumno ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en el examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno. Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.**

x_i	0	1	2
p_i	0,35	0,50	0,15



Página 254

13 **Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

a)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$

b)

x_i	0	1	2
p_i	$\left(\frac{7}{10}\right)^2$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$

14 **En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una bola de A, y si sale cruz, se saca de B. Se observa el número que tiene la bola.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Represéntala gráficamente.

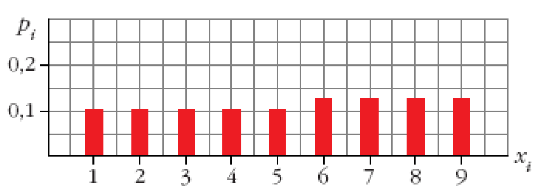
c) Calcula μ y σ.

a)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$

x_i	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0,125$	0,125	0,125	0,125

b)



c) $\mu = 5,25$; $\sigma = 2,59$

15 **En las familias con 4 hijos e hijas, nos fijamos en el número de hijas.**

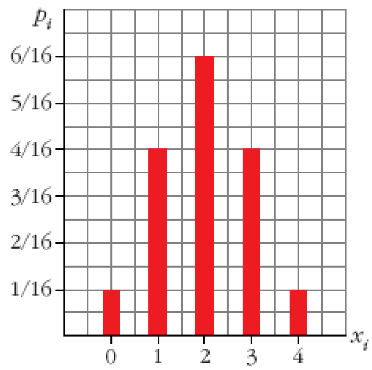
a) Haz la tabla con las probabilidades suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma.

b) Represéntala gráficamente y halla la media y la desviación típica.

a)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

b)



$\mu = 2$

$\sigma = 1$

Distribución binomial

16 **En una distribución binomial $B(7;\ 0,4)$ calcula:**

a) $P[x = 2]$ **b) $P[x = 5]$** **c) $P[x = 0]$**

d) $P[x > 0]$ **e) $P[x > 3]$** **f) $P[x < 5]$**

a) $\binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 = 0,261$

b) $\binom{7}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^2 = 0,077$

c) $0,6^7 = 0,028$

d) $1 - P[x = 0] = 0,972$

e) 0,290

f) 0,904

17 **En una distribución binomial $B(9;\ 0,2)$ calcula:**

a) $P[x < 3]$ **b) $P[x \geq 7]$**

c) $P[x \neq 0]$ **d) $P[x \leq 9]$**

a) $P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0,738$

b) $P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0,000314$

c) $1 - P[x = 0] = 1 - 0,134 = 0,866$

d) 1

18 **Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste correctamente más de 2 preguntas?

c) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas.

x es $B\left(10; \dfrac{1}{4}\right)$

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 = 0{,}146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$= 1 - (0{,}056 + 0{,}188 + 0{,}282) = 1 - 0{,}526 = 0{,}474$

c) $P[x = 0] = 0{,}75^{10} = 0{,}056$

19 **Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si esta experiencia se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener:**

a) Tres bolas rojas.

b) Menos de tres rojas.

c) Más de tres rojas.

d) Alguna roja.

Si consideramos éxito = "sacar roja", x es $B(5; 0{,}3)$

a) $P[x = 3] = \binom{5}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}1323$

b) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] =$

$= 0{,}16807 + 0{,}36015 + 0{,}3087 = 0{,}83692 \approx 0{,}8369$

c) $P[x > 3] = 1 - P[x \le 3] = 1 - (0{,}1323 + 0{,}8369) = 0{,}0308$

d) $P[x \ne 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}7^5 = 0{,}8319$

20 **Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial y di los valores de n, p, μ y σ.**

a) Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que sólo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?

b) En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.

c) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.

d) El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan a 46 números.

e) El 1% de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.

a) $B\left(50; \dfrac{1}{3}\right)$; $\mu = \dfrac{50}{3} = 16{,}67$; $\sigma = 3{,}33$

b) $B\left(30; \dfrac{1}{3}\right)$; $\mu = 10$; $\sigma = 2{,}58$ relativo a las que contesta al azar

c) $B\left(400; \frac{1}{2}\right)$; $\mu = 200$; $\sigma = 10$

d) $B(46; 0{,}11)$; $\mu = 5{,}06$; $\sigma = 2{,}12$

e) $B(1\,000; 0{,}01)$; $\mu = 10$; $\sigma = 3{,}15$

PARA RESOLVER

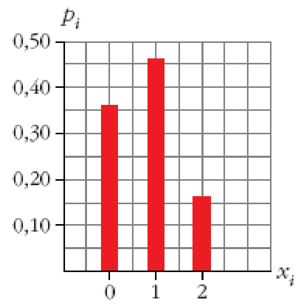
21 Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos dos veces y anotamos el número de cruces. Haz una tabla con la distribución de probabilidad, represéntala gráficamente y calcula su media y su desviación típica.

x es $B(2; 0{,}4)$

x_i	0	1	2
p_i	0,36	0,48	0,16

$\mu = 0{,}8$

$\sigma = 0{,}69$



22 La probabilidad de que un aparato de televisión, antes de revisarlo, sea defectuoso, es 0,2. Al revisar cinco aparatos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

b) ¿Y la de que haya alguno defectuoso?

x es $B(5; 0{,}2)$

a) $P[x = 0] = 0{,}8^5 = 0{,}328$

b) $P[x \neq 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}328 = 0{,}672$

Página 255

23 En una fiesta hay tantos chicos como chicas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de seis personas haya tres chicas?

b) ¿Y la de que haya menos de tres chicas?

x es $B(6; 0{,}5)$

a) $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125$

b) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0{,}5^6 + 6 \cdot 0{,}5^6 + 15 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}3437$

24 **La probabilidad de que un torpedo lanzado por un submarino dé en el blanco es 0,4. Si se lanzan 6 torpedos, halla la probabilidad de que:**

a) Solo uno dé en el blanco.

b) Al menos uno dé en el blanco.

x es $B(6; 0,4)$

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^5 = 0,1866$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,6^6 = 0,9533$

25 **En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos.**

Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

x es $B(50; 0,02)$

a) $P[x = 0] = 0,98^{50} = 0,364$

b) $P[x = 1] = 50 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{49} = 0,372$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$= 1 - (0,364 + 0,372 + 0,186) = 1 - 0,922 = 0,078$

Por término medio, habrá $\mu = 50 \cdot 0,02 = 1$ tornillo defectuoso en cada caja.

26 **Un tipo de piezas requiere de 4 soldaduras. Se hace un control de calidad a mil de esas piezas y se obtienen los siguientes resultados:**

SOLDADURAS DEFECTUOSAS	0	1	2	3	4
PIEZAS	603	212	105	52	28

¿Se ajustan estos datos a una binomial?

La media de la muestra es $\bar{x} = 0,69$.

Si las cuatro soldaduras tuvieran la misma probabilidad, p, de ser defectuosa y fueran independientes, el número, x, de soldaduras defectuosas en cada pieza seguiría una distribución binomial $B(4, p)$, por lo cual:

$$\bar{x} = 4 \cdot p \rightarrow 0,69 = 4p \rightarrow p = 0,1725$$

Veamos cómo se comportaría, teóricamente, esta binomial con 1000 individuos y comparémoslo con los resultados de la muestra:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$1000 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
0	0,4689	468,9	469	603	134
1	0,3910	391,0	391	212	179
2	0,1223	122,3	122	105	17
3	0,0170	17,0	17	52	35
4	0,0009	0,9	1	28	27

Las diferencias son enormes. Se rechaza la hipótesis de que "el número de soldaduras defectuosas en una pieza" siga una distribución binomial.