

EJERCICIOS DE DERIVADAS Y GRÁFICAS

1.- (Usando la definición de derivada de una función en un punto)

Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(4+h) - (4+h)^2 - 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h-3) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(5+h) - (5+h)^2 - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)(5-5-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-5-h) = -5 \end{aligned}$$

2.- (Usando la definición de derivada de una función en un punto)

Halla la derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, -1 y 5.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(1+h-2)] - (-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h-1)] + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h-1)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h-1} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(-1+h-2)] - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h-3)] + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + h - 3}{h(h-3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(5+h-2)] - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h+3)] - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - h - 3}{h(h+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h+3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$$f'(x) = 6x - 6$$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = \text{sen } x \cos x$

$$f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

6. $f(x) = \text{tg } x$

$$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. $f(x) = x e^x$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

$$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

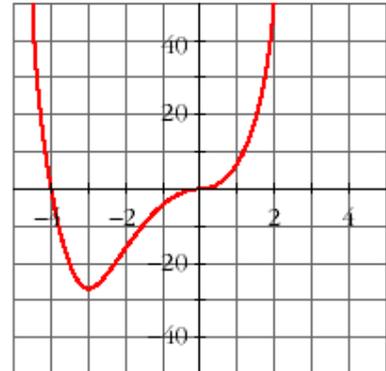
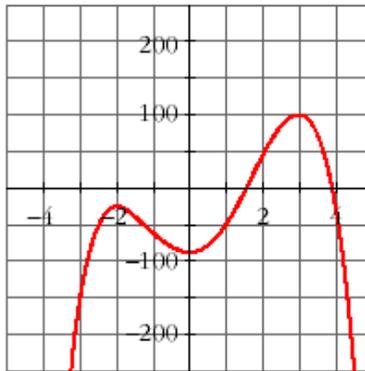
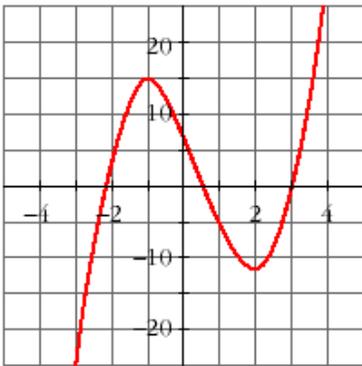
4.- Estudia Dominio, simetrías, cortes con ejes, máximos, mínimos, puntos de inflexión, además de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y

Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

c) $y = x^4 + 4x^3$



5.-

Halla la función derivada de estas funciones:

26 a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $y = (x^2 - 3)^3$

b) $y' = 6x(x^2 - 3)^2$

27 a) $y = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$

a) $y' = 1$ (si $x \neq 0$)

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28 a) $y = \sqrt[3]{(x + 6)^2}$

a) $y' = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x + 6}}$

b) $y = \text{sen } \sqrt{x}$

b) $y' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

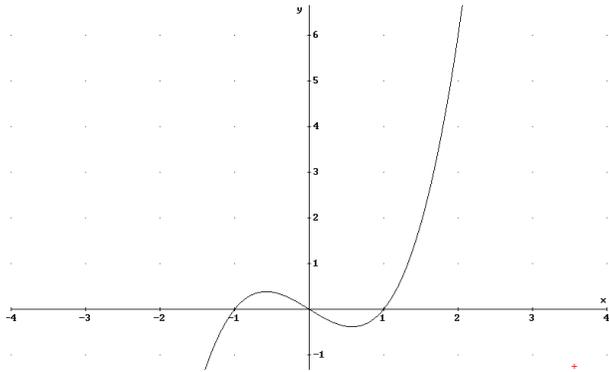
29 a) $y = (x-2)^x$

(haced este ejercicio por derivación logarítmica)

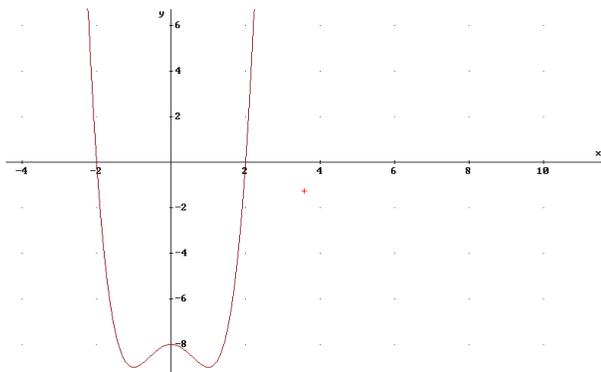
b) $y = (\text{sen } x)^x$

6.- Estudia y representa las siguientes funciones:

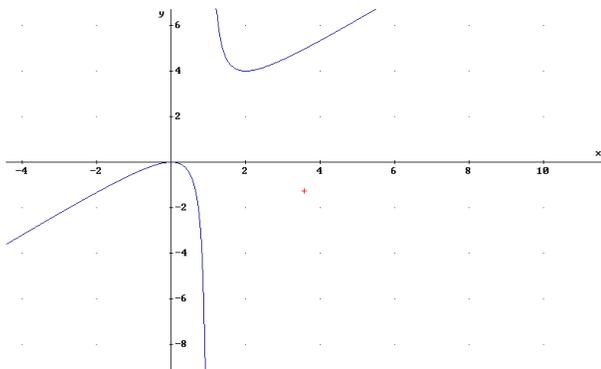
1) $y = x^3 - x$



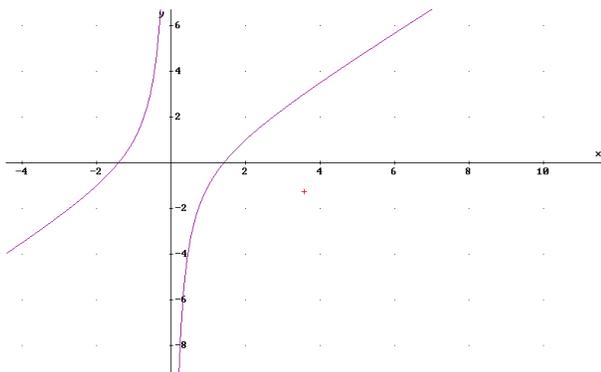
2) $y = x^4 - 2x^2 - 8$



3) $y = \frac{x^2}{x-1}$



4) $y = x - \frac{2}{x}$



7.-

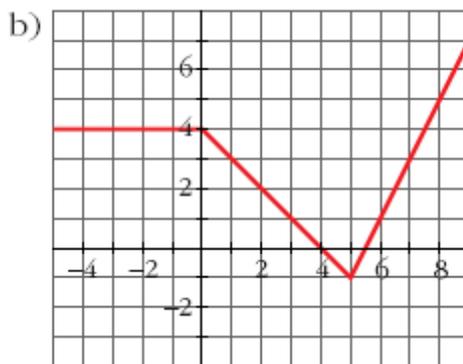
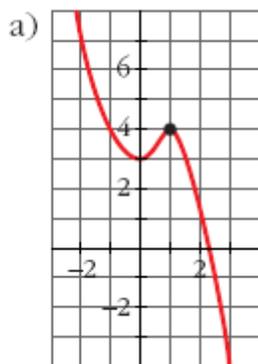
Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

a) $y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$

Hazlo sin mas que realizar tablas de valores

Solución:



8.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

Solución

a) Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

b) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 1$

c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.

e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

9.-

Estudia el comportamiento de estas funciones en los puntos en los que no están definidas:

a) $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $y = \frac{x}{x-5}$

c) $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

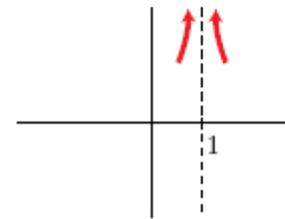
d) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

Solución

a) $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

No definida en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$



b) $y = \frac{x}{x-5}$

No definida en $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$$

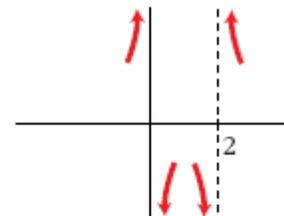


c) $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

$x^2 - 2x = x(x - 2)$. No definida en $x = 0$ y en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

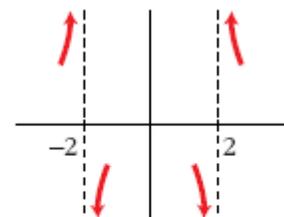


d) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

No definida en $x = 2$ y en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



10.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3^{x^2 + 1}$

b) $y = 5^{\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

d) $y = \frac{x}{\ln x}$

e) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

f) $y = \cos^3(2x + 1)$

Solución

a) $y' = 3^{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot \ln 3$

b) $y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 5$

c) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $y' = \frac{\ln x - x \cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x) - 1}{\ln^2 x}$

e) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

f) $y' = 3 \cos^2(2x + 1) \cdot (-\operatorname{sen}(2x + 1)) \cdot 2 = -6 \cos^2(2x + 1) \cdot \operatorname{sen}(2x + 1)$

11.-

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f ? ¿Tiene f máximo o mínimo?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \rightarrow \text{Intervalos de crecimiento.}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow (1, 3) \rightarrow \text{Intervalo de decrecimiento.}$$

Máximo en (1, 8) y mínimo en (3, 4).

12.-

Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^3 - 18x + 1$.

$$f'(x) = 9x^2 - 18 = 9(x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

13.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de estas funciones analizando el signo de su derivada:

a) $y = \frac{x-3}{5}$

b) $y = x^2 - 5x + 3$

c) $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4}$

d) $y = 1 + 2x - x^2$

e) $y = x^3$

f) $y = (x+1)^4$

g) $y = (2-x)^5$

h) $y = (3-x)^3$

Solución

a) $y' = \frac{1}{5}$. Creciente para todo x .

b) $y' = 2x - 5$. Decrece en $(-\infty, \frac{5}{2})$. Crece en $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

c) $y' = \frac{3x-1}{2}$. Decrece en $(-\infty, \frac{1}{3})$. Crece en $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

d) $y' = 2 - 2x$. Crece en $(-\infty, 1)$. Decrece en $(1, +\infty)$.

e) $y' = 3x^2$. Creciente para todo $x \neq 0$.

f) $y' = 4(x+1)^3$. Decrece en $(-\infty, -1)$. Crece en $(-1, +\infty)$.

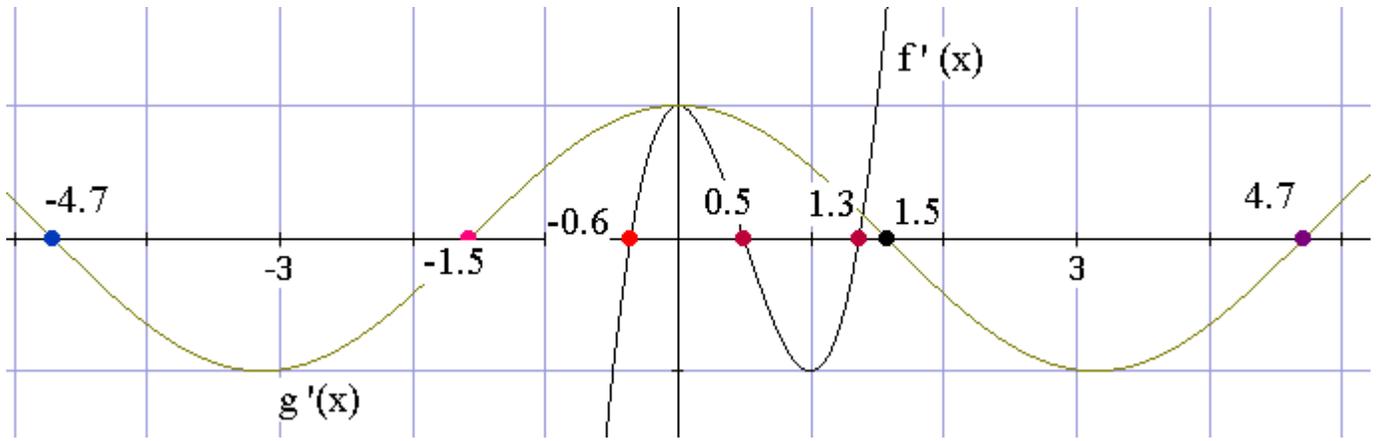
g) $y' = -5(2-x)^4$. Decrece para todo $x \neq 2$.

h) $y' = 3(3-x)^2 \cdot (-1) = -3(3-x)^2$; $y' < 0$ para $x \neq 3$; $y' = 0$ en $x = 3$.

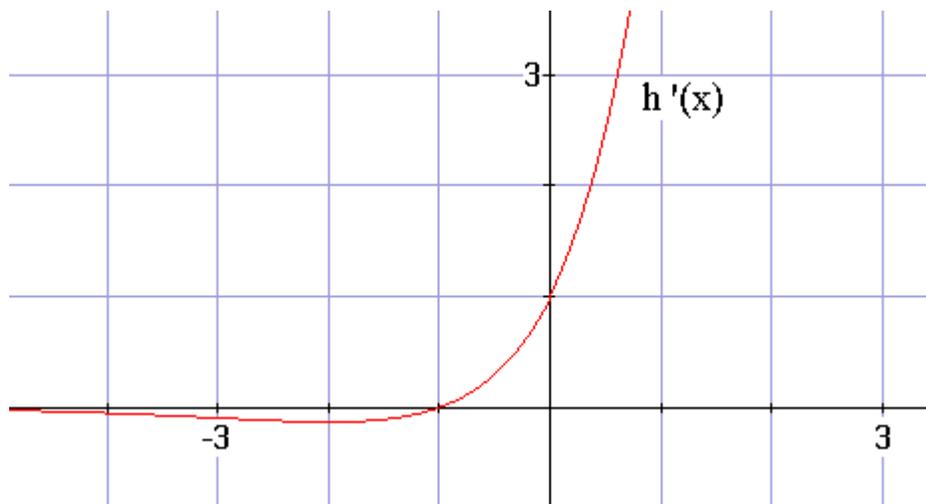
La función es decreciente.

14.-

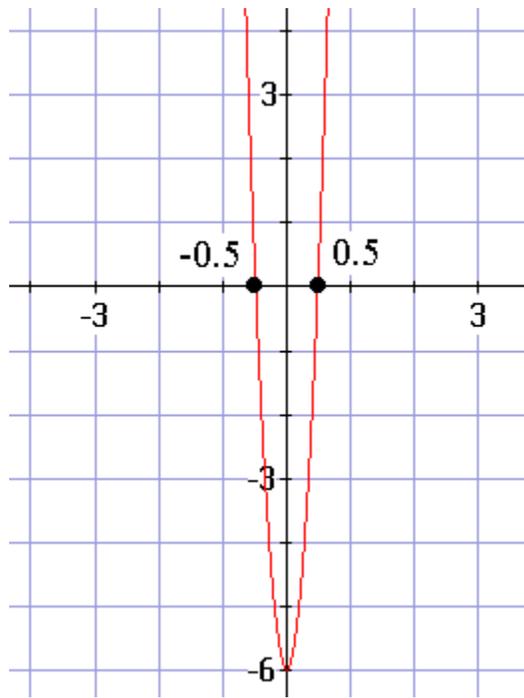
1. Las siguientes gráficas representan dos funciones: $f'(x)$, función derivada de una función $f(x)$, y $g'(x)$, función derivada de una función $g(x)$. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no aparecen en el dibujo. Se pide estudiar el crecimiento y los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.



2. En la siguiente gráfica aparece representada la función $h'(x)$, derivada de $h(x)$. Estudia la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de $h(x)$. ¿En qué intervalos es positiva $h''(x)$, la segunda derivada de $h(x)$? ¿En cuáles es negativa? ¿Se puede saber si la función $h(x)$ tiene puntos de inflexión?



3. La siguiente función es la representación gráfica de la segunda derivada de una función $f(x)$. ¿Qué se puede averiguar sobre la concavidad y la convexidad. ¿Tiene la función $f(x)$ puntos de inflexión? Responde a todas las preguntas razonadamente



15.-

Estudia la curvatura de las siguientes funciones:

- a) $y = x^3 - 6x^2$
- b) $y = 3x - x^3 - 2$
- c) $y = -x^4 + 2x^2$

Podeis mirar los ejercicios siguientes de vuestro libro:

Pag 255.....6.Actividades 1 y 2

Pag 259.....Ejercicio 7