

Examen rectas tangentes y representación de funciones

1º BACH CCSS

- 1) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x}$ en el punto de abscisas $x = 1$.

Solución: ecuación punto pendiente : $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$x_0 = 1 \rightarrow y_0 = f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 5}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Por tanto, $(x_0, y_0) = (1, 7)$

$$m = f'(x_0)$$

Calculamos en primer lugar la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 + 5) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 5}{x^2} = \frac{2x^2 - 5}{x^2}$$

$$m = f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 5}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Tenemos $(x_0, y_0) = (1, 7)$; $m = -3$

Sustituimos en la ecuación punto pendiente de la recta:

$$y - 7 = -3(x - 1) \rightarrow y - 7 = -3x + 3 \rightarrow y = -3x + 3 + 7$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $y = -3x + 10$

- 2) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y que es paralela a $y = 3x - 5$.

Solución: ecuación punto pendiente : $y - y_0 = m(x - x_0)$.

En primer lugar, sabemos que por ser paralelas deben tener la misma pendiente. Por tanto tenemos que: $m = 3$.

Por otra parte sabemos que: $m = f'(x_0)$.

De aquí vamos a calcular x_0 .

$$f'(x_0) = 4x_0 + 3 = 3 = m \rightarrow 4x_0 + 3 = 3 \rightarrow 4x_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

Ya que tenemos x_0 podemos calcular y_0 .

$$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \rightarrow y_0 = 1$$

Tenemos $(x_0, y_0) = (0, 1)$; $m = 3$

Sustituimos en la ecuación punto pendiente de la recta:

$$y - 1 = 3(x - 0) \rightarrow y - 1 = 3x + 0 \rightarrow y = 3x + 1$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $y = 3x + 1$

- 3) Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcula a y b sabiendo que la función pasa por el punto (0,-5) y que en $x = 0$ la recta tangente es paralela a $y = -4x$.

Solución: Tenemos la función $f(x) = x^2 + ax + b$ y sabemos que pasa por el punto (0,-5). Esto quiere decir que $f(0) = -5$.

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = -5 \rightarrow b = -5$$

Por otro lado, sabemos que la recta tangente a la función dada en $x = 0$ es paralela a $y = -4x$.

$$\text{Luego, } m = f'(0) = -4 \rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 + a = -4 \rightarrow a = -4$$

- 4) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, se pide:

- Calcular su dominio y los puntos de corte con los ejes, y estudiar la simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Estudiar su monotonía y los extremos.
- Estudiar su curvatura y los puntos de inflexión.
- Hacer su representación gráfica aproximada.

Solución:

$$\text{a) Dominio: } x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Puntos de corte:

$$\text{Eje OX: } \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{punto (0,0)}$$

$$\text{Eje OY: } \frac{0^3}{0^2-1} = 0 \rightarrow y = 0 \quad \text{punto (0,0)}$$

Simetría:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1}$$

$$-f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1}$$

$f(-x) = -f(x)$ por tanto, la función es simétrica IMPAR.

b) AH: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

No tiene AH.

Estudiamos las asíntotas verticales en los puntos de discontinuidad.

AV: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$ Hay AV en $x = 1$

Estudiamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \end{cases}$$

AV: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0}\right) = \infty$ Hay AV en $x = -1$

Estudiamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty \end{cases}$$

Estudiamos ahora las asíntotas oblicuas: AO:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, hay AO en $y = x$.

c) Para estudiar la monotonía y los extremos, calculamos la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\text{Puntos críticos: } f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0 \quad \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Construimos la tabla con los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de $f'(x)$:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	mín	$\nearrow$

Máximo relativo en $x = -\sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$

Mínimo relativo en $x = \sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

- d) Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión, calculamos la derivada segunda de la función, es decir, derivamos la primera derivada

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{(x^2 - 1) \cdot [(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1) - 4x \cdot (x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1) - 4x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} \\ &= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Dom}(f'') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\text{Puntos críticos: } f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x = 0$$

$$x(2x^2 + 6) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6 = 0 \rightarrow x^2 = -3 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \rightarrow \nexists \end{cases}$$

Construimos la tabla con los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de $f''(x)$:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$\neq$	$+$	0	$-$	$\neq$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\neq$	$\cup$	PI	$\cap$	$\neq$	$\cup$

Punto de inflexión en $x = 0 \rightarrow (0,0)$

e) Representación gráfica aproximada:

Utilizamos toda la información proporcionada por los apartados anteriores: pto de corte, asíntotas, máximos y mínimos, límites laterales, pto de inflexión...

