

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Estudio de Funciones

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ \frac{5}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ se pide:

- a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de f .
- b) Calcular sus asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x) = \ln(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y = f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2) & \text{si } x \in (-2, 1] \\ 2a + 3bx & \text{si } x \in (1, 2) \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

7. (1,25 puntos). Derivar:

a) $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$ b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - e^{x^2 + 2x} + 3^x$

☀️😊 **Comodín:** (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores).

Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ \frac{5}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de f .

- Zona $(-\infty, 2)$: f coincide aquí con $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, por lo que g es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo los puntos que anulan el denominador, que son:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

La discontinuidad de g en $x = 2$ no nos incumbe, puesto que $2 \notin (-\infty, 2)$, que es la zona donde coincide con la función en estudio, que es f . Pero la otra, $x = -1$, hay que estudiarla, y eso hacemos:

1) $\nexists f(-1)$.

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left(\frac{-6}{0} \right) = \infty$. Calculamos los límites laterales para determinar el signo del ∞ . Ambos límites dan ∞ , porque el límite completo da dicho resultado. Pero en los laterales se puede calcular el signo de dicho infinito. Una forma muy cómoda de hacerlo es tomar un valor de x muy próximo a -1 , a izquierda o a derecha, según el límite lateral calculado, y obtener el signo del resultado. Así:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

Por ello, en $x = -1$ f presenta una discontinuidad asintótica de salto infinito.

- Zona $(2, +\infty)$: f coincide con $h(x) = 5/x$, que, al ser elemental, es continua en su dominio, que es $\mathbb{R} - \{0\}$. Pero como $0 \notin (2, +\infty)$, es discontinuidad de h pero no de f . Luego f es continua en $(2, +\infty)$.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 3$. 2) Para calcular el límite de f cuando x tiende a 2, hay que, forzosamente, estudiar los límites laterales, puesto que la fórmula de f es diferente a izquierda y a derecha de 2. Así

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x} = \frac{5}{2}$$

Como los dos límites laterales existen pero no coinciden, se trata de una discontinuidad asintótica de salto finito.

En definitiva, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$, con discontinuidades asintótica de salto infinito en -1 y de salto finito en 2 .

b) Calcular sus asíntotas.

- Asíntotas horizontales: Puede haber una distinta por cada lado, puesto que la definición de f es diferente al tender a $-\infty$ y a $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \Rightarrow$ La recta horizontal de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \left(\frac{5}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

- **Asíntotas verticales:** Lo tenemos casi hecho, por el estudio anterior de la continuidad de la función. Puede tener asíntotas verticales en $x = -1$ y en $x = 2$, porque son los puntos de discontinuidad. Como sabemos que:

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \infty \Rightarrow$ La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = +\infty \Rightarrow$ La recta $x = 2$ es asíntota vertical a la izquierda de 2 solamente.

- **Asíntotas oblicuas:** Como tiene asíntotas horizontales por ambos infinitos, al intentar calcular asíntotas oblicuas se repetirá el resultado conocido ya de las asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Ante un cociente de polinomios con indeterminación $0/0$ los descomponemos por Ruffini, empleando el número a quien tiende x . Numerador y denominador son, respectivamente:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -14 & 12 & 0 \\ & & 2 & -12 & 0 \\ \hline & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -10 & 27 & -18 \\ & & 1 & -9 & 18 \\ \hline & 1 & -9 & 18 & 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 - 12x)}{(x-1)(x^2 - 9x + 18)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 12x}{x^2 - 9x + 18} = \frac{-10}{10} = \boxed{-1}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

Un límite con indeterminación $\infty - \infty$ donde tenemos raíces dentro de una resta, requiere multiplicar y dividir por el conjugado de dicha resta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \left(\frac{1}{+\infty + \infty}\right) = \boxed{0} \end{aligned}$$

A tener en cuenta que éste límite, cuando x tiende a $-\infty$, no existiría, porque cuando x fuese tomando valores negativos ninguna de las dos raíces cuadradas existiría.

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Siendo el dominio el conjunto de valores de x para los que existe imagen, lo constituirán las soluciones de la inecuación:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0$$

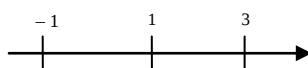
Para resolverla, descomponemos en factores el polinomio, a la vez que calculamos sus raíces. Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & -1 & 5 & 6 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 8 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 4 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 7 & 7 & 0 \end{array}$$

Así, las raíces son 1, -1, 3. Y factorizando el polinomio, la inecuación a resolver es:

$$1 \cdot (x - 1)(x + 1)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3) \geq 0$$

Dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante las tres raíces obtenidas, resultando:



En cada intervalo resultante, el signo del producto se mantiene constante. Así, basta tomar un punto cualquiera para evaluar dichos signos. Y como queremos que el producto total sea positivo o nulo, según nos ha quedado la inecuación, se tiene:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x - 1$	-	...	-	0	+	...	+
$x + 1$	-	0	+	...	+	...	+
$x - 3$	-	...	-	...	-	0	+
$(x - 1)(x + 1)(x - 3)$	-	0	+	0	-	0	+
¿Sirven? $\rightarrow$	No	Si	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto:

$$D(f) = [-1, 1] \cup [3, +\infty)$$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x) = \ln(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, tiene como pendiente $m = f'(a)$. Como las coordenadas completas del punto de tangencia son $(a, f(a))$, dicha recta es, en forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- $a = 0 \Rightarrow$ Como $f(a) = f(0) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0$, el punto de tangencia es $(0, 0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow m = f'(a) = f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

Por lo que la recta tangente es:

$$y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y = x}$$

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y = f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.

- AH: Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.
- AV: La única discontinuidad la presenta en $x = -2$ (que anula el denominador). Entonces: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{x+2} = \left(\frac{12}{0} \right) = \infty \Rightarrow$ La recta de ecuación $x = -2$ es asíntota vertical.
- AO: Dado que:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x+2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x(x+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 6x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x} = -6$$

Se tiene que $y = 3x - 6$ es asíntota oblicua.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2) & \text{si } x \in (-2, 1] \\ 2a + 3bx & \text{si } x \in (1, 2) \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Lo primero que tenemos que hacer es comprobar que, en efecto, es continua en todo $\mathbb{R}$: podría tener alguna discontinuidad que no dependiera ni de a ni de b . Así que estudiamos la continuidad completamente:

- Zona $(-2, 1)$: (Recordar que los puntos que conectan unas zonas con otras deben estudiarse por separado, por lo que no incluimos aquí el 1). f coincide con la función $g(x) = \log_3(x+2)$. Por ser elemental, g es continua en su dominio, que es $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Todos los puntos de la zona $(-2, 1)$ verifican esta condición (son mayores estrictamente que -2), por los que son puntos donde g (y, por coincidir con g , también f) es continua. Luego f es continua en $(-2, 1)$.
- Zona $(1, 2)$: f coincide con $h(x) = 2a + 3bx$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Por ser h elemental, es continua, entonces, en su dominio: $\mathbb{R}$. Luego h no tiene ningún punto de discontinuidad. f , en $(1, 2)$ que es donde coincide con h , tampoco. Luego f es continua en $(1, 2)$.
- Zona $(2, +\infty)$: f coincide con $j(x) = ax^2 + bx + 1$, que es continua en su dominio, por ser función elemental. Su dominio es $\mathbb{R}$. Luego no presenta discontinuidades. f , donde coincide con j , tampoco. Por ello, f es continua en $(2, +\infty)$.
- $x = 1$: Veamos las tres condiciones de continuidad en un punto.
 - 1) $\exists f(1) = \log_3(1+2) = \log_3(3) = 1$
 - Para estudiar el límite cuando $x \rightarrow 1$, hemos de calcular los dos límites laterales, puesto que la fórmula de $f(x)$ es diferente a izquierda y a derecha de 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3(x+2) = \log_3(1+2) = \log_3(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2a + 3bx) = 2a + 3b$$

Por ello, para que los dos laterales coincidan, y lo hagan, a su vez, con $f(1)$, que es la condición para que f sea continua en $x = 1$, se precisa que:

$$\boxed{2a + 3b = 1}$$

- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 4a + 2b + 1$

2) Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2a + 3bx) = 2a + 6b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + 2bx + 1) = 4a + 2b + 1$$

Para que coincidan y, además, lo hagan con $f(2)$, debe ocurrir:

$$2a + 6b = 4a + 2b + 1 \Leftrightarrow \boxed{-2a + 4b = 1}$$

Nos resulta un sistema de ecuaciones, que resolvemos por reducción:

$$\begin{array}{rcl} \left. \begin{array}{l} 2a + 3b = 1 \\ -2a + 4b = 1 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \begin{array}{l} 7b = 2 \Rightarrow b = 2/7 \\ 2a = \frac{1}{7} \Rightarrow a = \frac{1}{14} \end{array} \end{array}$$

Por ello, la solución final es: $\boxed{a = 1/14, b = 2/7}$.

7. (1,25 puntos). Derivar:

$$\text{a) } y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6} \quad \text{b) } y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - e^{x^2 + 2x} + 3^x$$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' = f'(x) &= \frac{2x(x^2 - x - 6) - (x^2 - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 12x - (2x^3 - x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 12x - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x - 6)^2} = \\ &= \frac{-x^2 - 10x - 1}{(x^2 - x - 6)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } y' = f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - (2x + 2)e^{x^2 + 2x} + 3^x \ln 3 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - (2x + 2)e^{x^2 + 2x} + 3^x \ln 3$$

Recordamos que la simplificación, cuando derivamos, debe terminar en una forma que sea, a la vez, fácil para calcular imágenes y para derivar de nuevo. Es algo subjetivo el considerar el final de la simplificación.

☀️😊 **Comodín:** (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores).

Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Necesitamos el dominio de la función, que es $\mathbb{R}$ por tratarse de una función polinómica, y la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

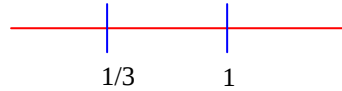
cuyo dominio también es $\mathbb{R}$, por idéntica razón. Por tanto, ninguna de las dos tiene discontinuidades. Así:

- Discontinuidades de f ó f' : No tiene.

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Estudio de Funciones

• $f'(x) = 0$: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{1}{3}$

Dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante los valores obtenidos por cualquiera de las dos vías anteriores:



Damos a f' cualquier valor dentro de cada intervalo, puesto que todos los números del mismo proporcionarán el mismo signo para f' :

	$(-\infty, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

Sustituyendo en f , tenemos que:

- Coordenadas del máximo relativo: $(1/3, 4/27)$
- Coordenadas del mínimo relativo: $(1, 0)$

No piden la gráfica de la función, pero es la siguiente:

