

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** $P(x)$ para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para $x=1$

b) $P(x)=x^3+1$, para $x=-1$

c) $P(x)=x^2+x+2$, para $x=2$

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para $x=-2$

(Soluc: a) 2; b) 0; c) 8; d) -4)

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo $P(1)=7$ (Soluc: $k=-11$)

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+kx+29$, siendo $P(-2)=35$
(Soluc: $k=5$)

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo $P(-4)=58$
(Soluc: $k=-3306$)

d) $P(x)=3x^3+kx^2+x+1$, siendo $P(-1)=-3$ (Soluc: $k=0$)

e) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$ siendo $P(1/2)=125$
(Soluc: $k=2105/16$)

Sumas, restas y productos de polinomios:

3. Sumar convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

(Soluc: a) $5x$; b) $-5x^2$; c) $4x^2y$; d) 0 ; e) $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; f) $5x^3yz$; g) $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; h) $2xy^3+3x^3y$)

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar $P(x)+Q(x)$ y $P(x)-Q(x)$

a) $P(x)+Q(x)=$

(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$)

b) $P(x)-Q(x)=$

(Soluc: $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $P(x)+Q(x)+R(x)=$

(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)

b) $P(x)-Q(x)-R(x)=$

(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)

c) $P(x)+3Q(x)-2R(x)=$

(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

$$\text{a) } (-2x^3) \cdot \left(\frac{4}{5}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = \quad \left(\text{Soluc: } -\frac{4}{5}x^6\right)$$

$$\text{b) } \left(-\frac{5}{7}x^7\right) \cdot \left(\frac{3}{5}x^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x\right) = \quad \left(\text{Soluc: } \frac{4}{7}x^{10}\right)$$

$$\text{c) } 5x^3 \cdot 3x^2y \cdot (-4xz^3) = \quad \left(\text{Soluc: } -60x^5yz^3\right)$$

$$\text{d) } -3ab^2 \cdot 2ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2b\right) = \quad \left(\text{Soluc: } 4a^4b^4\right)$$

$$\text{e) } (3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5) \cdot 2x^2 = \quad \left(\text{Soluc: } 6x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 10x^2\right)$$

$$\text{f) } (-2x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1) \cdot (-3x^3) = \quad \left(\text{Soluc: } 6x^8 - 9x^6 + 6x^5 + 21x^4 - 3x^3\right)$$

$$\text{g) } \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{5}{4}\right) \cdot 12x^2 = \quad \left(\text{Soluc: } 8x^5 - 18x^4 + \frac{48}{5}x^3 - 15x^2\right)$$

$$\text{h) } \left(\frac{1}{2}ab^3 - a^2 + \frac{4}{3}a^2b + 2ab\right) \cdot 6a^2b = \quad \left(\text{Soluc: } 3a^3b^4 - 6a^4b + 8a^4b^2 + 12a^3b^2\right)$$

7. Extraer el máximo factor común posible:

$$\text{a) } 4x^2 - 6x + 2x^3 = \quad \left(\text{Soluc: } 2x(x^2 + 2x - 3)\right)$$

$$\text{b) } 12x^4y^2 + 6x^2y^4 - 15x^3y = \quad \left(\text{Soluc: } 3x^2y(4x^2y + 2y^3 - 5x)\right)$$

$$\text{c) } -3xy - 2xy^2 - 10x^2yz = \quad \left(\text{Soluc: } xy(-3 - 2y - 10xz)\right)$$

$$\text{d) } -3x + 6x^2 + 12x^3 = \quad \left(\text{Soluc: } 3x(4x^2 + 2x - 1)\right)$$

$$\text{e) } 2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3 = \quad \left(\text{Soluc: } 2ab(b - 2a^2 + 4a^3b^2)\right)$$

$$\text{f) } 2x^3 + 4x^2 - 8x = \quad \left(\text{Soluc: } 2x(x^2 + 2x - 4)\right)$$

$$\text{g) } 6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^2 = \quad \left(\text{Soluc: } 3xy(2x^2y - xz + 3y^2z^2)\right)$$

$$\text{h) } -2x(x-3)^2 + 4x^2(x-3) = \quad \left(\text{Soluc: } 2x(x-3)(x+3)\right)$$

8. Efectuar los siguientes **productos**:

$$\text{a) } (3x^2 + 5x - 6)(8x^2 - 3x + 4) \quad \left(\text{Soluc: } 24x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 38x - 24\right)$$

$$\text{b) } (5x^3 - 4x^2 + x - 2)(x^3 - 7x^2 + 3) \quad \left(\text{Soluc: } 5x^6 - 39x^5 + 29x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 3x - 6\right)$$

$$\text{c) } (2x^4 - 3x^2 + 5x)(3x^5 - 2x^3 + x - 2) \quad \left(\text{Soluc: } 6x^9 - 13x^7 + 15x^6 + 8x^5 - 14x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 10x\right)$$

$$\text{d) } (ab^2 + a^2b + ab)(ab - ab^2) \quad \left(\text{Soluc: } a^3b^2 + a^2b^2 - a^2b^4 - a^3b^3\right)$$

$$\text{e) } (-x^6 + x^5 - 2x^3 + 7)(x^2 - x + 1) \quad \left(\text{Soluc: } -x^8 + 2x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 7x + 7\right)$$

$$\text{f) } (x^2y^2 - 2xy)(2xy + 4) \quad \left(\text{Soluc: } 2x^3y^3 - 8xy\right)$$

g) $10(x-5+y-5) + (10-x)(10-y)$

(Soluc: xy)

h) $(x^2-4x+3/2)(x+2)$

(Soluc: $x^3-2x^2-13x/2+3$)

i) $(x^2+5x/2+35/3)(x-6)$

(Soluc: $x^3-7x^2/2-10x/3-70$)

j) $(2x^2+4x+2)(x-1/2)$

(Soluc: $2x^3+3x^2-1$)

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas:

a) $(2x^2+x+3/2)(2x^2-3) + 8x+7/2$

(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)(2x^2+2) - (-6x+24)$

(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)

c) $(3x^2-6x+1)(x^3-2x/3+2) + 14x/3$

(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)

d) $-x/3+1/3 + (2x^2-x/3-2/3)(3x^2+2)$

(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)

10. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $[R(x)]^2$

b) $P(x)-Q(x) \cdot R(x)$

c) $P(x) \cdot [Q(x)+R(x)]$

d) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

(Soluc: a) $49x^4-28x^3+18x^2-4x+1$; b) $-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$; c) $8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$

d) $56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$)

Identidades notables:

11. Desarrollar, aplicando las igualdades notables:

a) $(x+2)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(x+2)(x-2)$

d) $(3x+2)^2$

e) $(2x-3)^2$

f) $(5x+4)(5x-4)$

g) $(x^2+5)^2$

h) $(-2x+5)(2x+5)$

i) $(x^3-2)^2$

j) $(x^2-1)(x^2+1)$

k) $(2x^2+3x)^2$

l) $(2x^2-3)^2$

m) $(-x-3)^2$

n) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

o) $\left(2a - \frac{3}{2}\right)^2$

p) $(-x^2+3)^2$

q) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

r) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$

s) $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)^2$

t) $\left(2 + \frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3} + 2\right)$

u) $\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2$

v) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)$

w) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2$

x) $\left(24 - \frac{7}{4}x\right)^2$

(Soluc: n) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; o) $4a^2 - 6a + \frac{9}{4}$; q) $1 - \frac{x^2}{4}$; r) $4x^2 + 3x + \frac{9}{16}$; s) $\frac{9}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16}$; t) $4 - \frac{a^2}{9}$;

u) $\frac{9}{4}x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}$; v) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{9}$; w) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}$; x) $576 - 84x + \frac{49}{16}x^2$)

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2 + (x-2)(x+2)$

b) $(3x-1)^2 - (2x+5)(2x-5)$

c) $(2x+3)(-3+2x) - (x+1)^2$

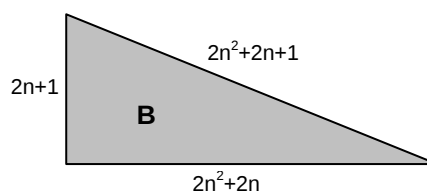
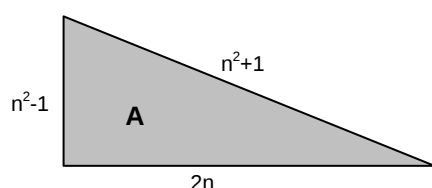
d) $(-x+2)^2 - (2x+1)^2 - (x+1)(x-1)$

e) $-3x + x(2x-5)(2x+5) - (1-x^2)^2$

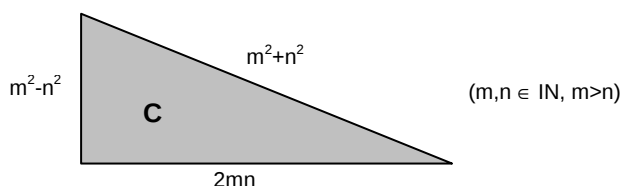
f) $(3x-1)^2 - (-5x^2-3x)^2 - (-x+2x^2)(2x^2+x)$

(Soluc: a) $2x^2+2x-3$; b) $5x^2-6x+26$; c) $3x^2-2x-10$; d) $-4x^2-8x+4$; e) $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; f) $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$)

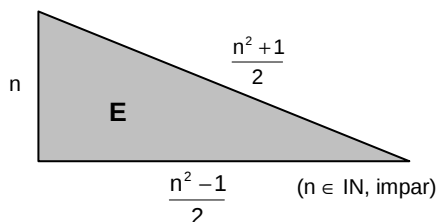
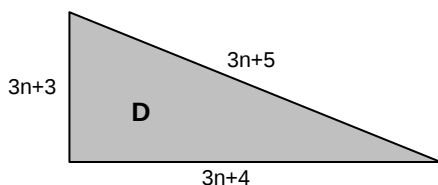
13. El matemático griego Pitágoras (siglo VI a.C) conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n \in \mathbb{N}$:



Por su parte, Euclides (s. III a.C.) conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:



Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

15. Probar que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es siempre el cuádruple de un impar. Comprobarlo con ejemplos.

Potencia de un binomio:

16. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$

b) $(x^2+3)^6$

c) $(2x^2+3y)^6$

d) $(2x^3+5)^5$

e) $(2x^4 + 5x)^5$	k) $(x^2 - 3x)^5$	q) $(2x - 3)^6$	v) $\left(\frac{x}{3} - 3\right)^5$
f) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$	l) $(3x - 2y)^6$	r) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^6$	
g) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^5$	m) $(2x^2 - 4)^4$	s) $(-x - 1)^4$	
h) $(a - b)^5$	n) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5$	t) $(2x - 1)^5$	
i) $(x - 3)^3$	o) $(2 - 3x^2)^5$	u) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$	
j) $(3x - 2)^4$	p) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^4$		

(Sol: a) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$; b) $x^{12} + 18x^{10} + 135x^8 + 540x^6 + 1215x^4 + 1458x^2 + 729$;
c) $64x^{12} + 576x^{10}y + 2160x^8y^2 + 4320x^6y^3 + 4860x^4y^4 + 2916x^2y^5 + 729y^6$; d) $32x^{15} + 400x^{12} + 2000x^9 + 5000x^6 + 6250x^3 + 3125$;
e) $32x^{20} + 400x^{17} + 2000x^{14} + 5000x^{11} + 6250x^8 + 3125x^5$; f) $x^4 + 4x^2 + 6 + 4/x^2 + 1/x^4$; g) $x^5 + 5x^4/2 + 5x^3/2 + 5x^2/4 + 5x/16 + 1/32$;
h) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; i) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$; j) $81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$;
k) $x^{10} - 15x^9 + 90x^8 - 270x^7 + 405x^6 - 243x^5$; l) $729x^6 - 2916x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64y^6$;
m) $16x^8 - 128x^6 + 384x^4 - 512x^2 + 256$; n) $x^5 - 5x^4/2 + 5x^3/2 - 5x^2/4 + 5x/16 - 1/32$; o) $32 - 240x^2 + 720x^4 - 1080x^6 + 810x^8 - 243x^{10}$;
p) $16x^4 - 32x^3/3 + 8x^2/3 - 8x/27 + 1/81$; q) $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$;
r) $x^6/64 - 9x^5/16 + 134x^4/16 - 135x^3/2 + 1215x^2/4 - 729x + 729$)

Cociente de polinomios:

17. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{4x^3}{2x^2} =$	h) $\frac{\frac{2}{3}x^2y^2z}{\frac{3}{2}xy^2} =$	m) $\frac{-8x^9 + \frac{3}{2}x^5 - x^4}{-\frac{3}{7}x^4} =$
b) $8x^4 : (-2x^2) =$	i) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c} =$	n) $(-18x^3yz^3) : (6xyz^3) =$
c) $\frac{7x^5}{2x^3} =$	j) $\frac{6x^5 - 9x^2 + 3x}{3x} =$	o) $\frac{-3a(a^3b) + 5a^4b}{-a^2b} =$
d) $-8x^3 : (2x^2) =$	k) $\frac{-12x^4 + 6x^3 - 4x^2}{-2x^2} =$	p) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y} =$
e) $-8x^3 : 2x^2 =$	l) $\frac{-6x^8 - 7x^4 - \frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3} =$	
f) $\frac{-3x^7}{-9x^4} =$		
g) $6x^3y^4 : (2x^2y) =$		

(Soluc: j) $2x^4 - 3x + 1$; k) $6x^2 - 3x + 2$; l) $18x^5/5 + 21x/5 + 9/20$; m) $56x^5/3 - 7x/2 + 7/3$; n) $-3x^2$; o) $-2a^2$; p) $3x^2y^2/2$)

18. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado mediante la regla $D = d \cdot C + R$:

1. $x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 15 \mid x^2 + 2$ (Soluc: C(x) = $x^2 - x + 5$; R(x) = $3x + 5$)

2. $2x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 \mid 2x^2 - 3$ (Soluc: C(x) = $x^3 + x + 1$; División exacta)

3. $6x^4 - 10x^3 + x^2 + 11x - 6 \mid 2x^2 - 4x + 3$ (Soluc: $C(x) = 3x^2 + x - 2$; División exacta)
4. $x^3 + 2x^2 + x - 1 \mid x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = x + 2$; $R(x) = 2x + 1$)
5. $8x^5 - 16x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x + 2 \mid 2x^2 - 3x + 2$ (Soluc: $C(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; División exacta)
6. $x^4 + 3x^3 - 2x + 5 \mid x^3 + 2$ (Soluc: $C(x) = x + 3$; $R(x) = -4x - 1$)
7. $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 6 \mid x^4 + 1$ (Soluc: $C(x) = x - 2$; $R(x) = 3x^2 - x - 4$)
8. $x^2 \mid x^2 + 1$ (Soluc: $C(x) = 1$; $R(x) = -1$)
9. $3x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 5 \mid x^3 - 2x + 4$ (Soluc: $C(x) = 3x^3 + 8x - 12$; $R(x) = 13x^2 - 56x + 53$)
10. $x^8 \mid x^2 + 1$ (Soluc: $C(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$; $R(x) = 1$)
11. $x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \mid x - 2$ (Soluc: $C(x) = x^2 - 2x + 1$; $R = -6$)
12. $x^2 + 1 \mid x^2 - 4x + 13$ (Soluc: $C(x) = 1$; $R(x) = 4x - 12$)
13. $2x^5 + 3x^2 - 6 \mid x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 51x + 153$; $R(x) = -465$)
14. $6x^2 - 5 \mid 3x$ (Soluc: $C(x) = 2x$; $R(x) = -5$)
15. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 2 \mid x - 1$ (Soluc: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 2$; División exacta)
16. $2x - 1 \mid 2$ (Soluc: $C(x) = x$; $R(x) = -1$)
17. $3x^5 - x^4 + 8x^2 - 5x - 2 \mid x^2 - x + 1$ (Soluc: $C(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$; $R(x) = x - 7$)
18. $4x + 1 \mid 2x$ (Soluc: $C(x) = 2$; $R(x) = 1$)
19. $5x^4 - 2x^3 + x - 7 \mid x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = 5x^2 - 2x + 5$; $R(x) = -x - 2$)
20. $1 + x \mid 1 - x$ (Soluc: $C(x) = -1$; $R(x) = 2$)
21. $4x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7 \mid 2x^2 - 3x + 5$ (Soluc: $C(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 8$; $R(x) = -14x + 33$)
22. $9x^3 + 3x^2 - 7x + 2 \mid 3x^2 + 5$ (Soluc: $C(x) = 3x + 1$; $R(x) = -22x - 3$)
23. $4x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \mid 2x^2 + x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 - x + 2$; $R(x) = -1$)
24. $4x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 5 \mid 2x^2 - x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^3 + x^2 - x - 3$; $R(x) = 14$)
25. $6x^4 + 5x^2 - 3x + 8 \mid 3x^3 - 2x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x$; $R(x) = 9x^2 + 3x + 8$)
26. $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \mid 2x^2 - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x + 3/2$; $R(x) = 8x + 7/2$)
27. $8x^4 + 3x^3 + 2x - 2 \mid 4x^2 + x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/4 + 23/16$; $R(x) = 21x/16 + 37/16$)
28. $2x^5 - x^3 + 3x - 9 \mid 2x^2 - x + 2$ (Soluc: $C(x) = x^3 + x^2/2 - 5x/4 - 9/8$; $R(x) = 35x/8 - 27/4$)
29. $6x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \mid 3x - 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/3 + 8/9$; $R(x) = -29/9$)
30. $4x^4 - x^3 + x + 5 \mid 2x^2 - x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/2 - 11/4$; $R(x) = -13x/4 + 53/4$)
31. $6x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 8 \mid 3x^2 - 5x + 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + 13x/3 + 38/9$; $R(x) = 121x/9 - 148/9$)
32. $8x^4 - 3x^2 + 7x - 5 \mid 4x^2 - 3x + 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + 3x/2 - 5/8$; $R(x) = 17x/8 - 15/4$)

$$33. 6x^5+5x^4+31x^2+2 \mid 2x^2+2$$

$$(Soluc: C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13; R(x)=6x-24)$$

$$34. 3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \mid 3x^2-6x+1$$

$$(Soluc: C(x)=x^3--2x/3+2; R(x)=14x/3)$$

$$35. 6x^4-x^3+2x^2-x-1 \mid 3x^2+2$$

$$(Soluc: C(x)=2x^2--x/3-2/3; R(x)=-x/3+1/3)$$

$$36. 4x^4 \mid 2x^2-1$$

$$(Soluc: C(x)=2x^2+1; R(x)=1)$$

$$37. 4x^4+x^3-x+1 \mid 2x^2-1$$

$$(Soluc: C(x)=2x^2+x/2+1; R(x)=-x/2+2)$$

19. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

Regla de Ruffini:

20. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$, y comprobar el resultado:

$$1. x^4-7x^3+8x^2-2 \mid x-1$$

$$(Soluc: C(x)=x^3-6x^2+2x+2; \text{División exacta})$$

$$2. x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$$

$$(Soluc: C(x)=x^2-2x+1; R=-6)$$

$$3. 2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \mid x-2$$

$$(Soluc: C(x)=2x^3+7x^2+10x+21; R=24)$$

$$4. 2x^5+3x^2-6 \mid x+3$$

$$(Soluc: C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153; R=-465)$$

$$5. 3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \mid x-4$$

$$(Soluc: C(x)=3x^3+2x^2+7x+8; R=37)$$

$$6. 2x^4-10x+8 \mid x+2$$

$$(Soluc: C(x)=2x^3-4x^2+8x-26; R=60)$$

$$7. 10x^3-15 \mid x+5$$

$$(Soluc: C(x)=10x^2-50x+250; R=-1265)$$

$$8. x^3-2x^2-13x/2+3 \mid x+2$$

$$(Soluc: C(x)=x^2-4x+3/2; \text{División exacta})$$

$$9. x^3-2x^2-3x \mid x+2$$

$$(Soluc: C(x)=x^2-4x+5; R=-10)$$

$$10. x^3-7x^2/2-10x/3-70 \mid x-6$$

$$(Soluc: C(x)=x^2+5x/2+35/3; \text{División exacta})$$

$$11. x^3-2x^2 \mid x+2$$

$$(Soluc: C(x)=x^2-4x+8; R=-16)$$

$$12. x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \mid x+3$$

$$\left(Soluc : C(x) = x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{23}{2}x - \frac{63}{2}; R(x) = \frac{191}{2} \right)$$

$$13. x^3+2x^2+3x+1 \mid x-1$$

$$(Soluc: C(x)=x^2+3x+6; R=7)$$

$$14. x^4-2x^3+x^2+3x+1 \mid x-2$$

$$(Soluc: C(x)=x^3+x+5; R=11)$$

$$15. x^3+a^3 \mid x+a$$

$$(Soluc: C(x)=x^2-ax+a^2; R=0)$$

$$16. x^3+x^2+x+1 \mid x+1$$

$$(Soluc: C(x)=x^2+1; \text{División exacta})$$

$$17. x^3-a^3 \mid x-a$$

$$(Soluc: C(x)=x^2+ax+a^2; R=0)$$

$$18. 2x^4+x^3-2x^2-1 \mid x+2$$

$$(Soluc: C(x)=2x^3-3x^2+4x-8; R=15)$$

19. $1+x \mid 1-x$ (Soluc: $C(x)=-1$; $R=2$)
20. $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \mid x-3$ (Soluc: $C(x)=2x^3-x^2+x-2$; División exacta)
21. $x^3+2x^2+3x \mid x-1$ (Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=6$)
22. $x^5+1 \mid x-1$ (Soluc: $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; $R=2$)
23. $2x^3+3x^2-1 \mid x-1/2$ (Soluc: $C(x)=2x^2+4x+2$; División exacta)
24. $x^3-5x^2+3x \mid x$ (Soluc: $C(x)=x^2-5x+3$; División exacta)
25. $3x^3+2x^2+2x-1 \mid x-1/3$ (Soluc: $C(x)=3x^2+3x+3$; División exacta)
26. $x^4+x^3-x^2+x-1 \mid x+2$ (Soluc: $C(x)=x^3-x^2+x-1$; $R=1$)
27. $2x^3-x^2-x-3 \mid 2x-3$ (Soluc: $C(x)=x^2+x+1$; División exacta)
(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)
28. $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \mid x-a$ (Soluc: $C(x)=ax^2-2a^2x$; $R=1$)

Teorema del resto:

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de $P(x)$ por $x-a$ coincide con el valor numérico $P(a)$ "

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre $x-1$ se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que $P(1)=0$

Utilidad: El th. del resto permite predecir, **sin necesidad de efectuar la división**, si se trata de una división exacta.

21. Comprobar el **teorema del resto** mediante las primeras divisiones del ejercicio anterior.
22. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por $x+1$ o por $x-2$ mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible? (Soluc: Sí; NO; $2x-3$)
23. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \mid x-3$ sea -1 ; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. (Soluc: $a=-3$)
24. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:
- | | | | |
|------------------------------|-------------|---------------------------|-------------|
| a) $x^3-3x^2+2x-10 \mid x-4$ | (Soluc: NO) | c) $x^6-1 \mid x-1$ | (Soluc: Sí) |
| b) $x^3-x^2+x+14 \mid x+2$ | (Soluc: Sí) | d) $x^5-3x^3+2x \mid x-4$ | (Soluc: NO) |
25. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:
- | | | | |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------------|------------------|
| a) $x^3+8x^2+4x+m \mid x+4$ | (Soluc: $m=-48$) | b) $2x^3-10x^2+mx+25 \mid x-5$ | (Soluc: $m=-5$) |
|-----------------------------|-------------------|--------------------------------|------------------|

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \mid x-2$	(Soluc: $m=-7$)	f) $x^3-5x^2+m \mid x-1$	(Soluc: $m=4$)
d) $mx^2-3x-744 \mid x-8$	(Soluc: $m=12$)	g) $5x^4+2x^2+mx+1 \mid x-3$	(Soluc: $m=-424/3$)
e) $x^2+4x-m \mid x+3$	(Soluc: $m=-3$)	h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \mid x+1$	(Soluc: $m=7$)

Teorema del factor:

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que $P(a)=0$ "

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

26. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \mid x+1$ es exacta. (Soluc: Al hacer $P(-1)$, sale 0)
27. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x-3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc: $P(x)=(x-3)(x+1)$)
28. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x-3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc: divisible por x+2 pero no por x-3)
29. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x-2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). (Soluc: Sí es divisible)
30. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x-1? ¿Por qué?
31. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

Factorización de polinomios de cualquier grado por Ruffini:

32. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:
 - i) Obtener sus raíces y comprobarlas.
 - ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
 - iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 b) x^2-2x-8 c) x^2-6x+9 d) $4x^2+23x-6$ e) x^2+x+1 f) $6x^2-7x+2$
33. Dados los siguientes polinomios se pide:
 - i) Obtener sus raíces por Ruffini.
 - ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)
 - iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$	(Soluc: $x=-1,2,3$)	d) $P(x)=x^4-2x^2+1$	(Soluc: $x=-1\text{doble},1\text{doble}$)
b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$	(Soluc: $x=1\text{doble},-3$)	e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$	(Soluc: $x=\pm 2, -1/2, 1/3$)
c) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$	(Soluc: $x=-1,2,3,4$)		

34. Sabiendo que una de sus raíces es $x=1/2$, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

35. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

1. $x^3-6x^2+11x-6=0$ (Soluc: $x=1,2,3$)
2. $x^3+x^2-9x-9=0$ (Soluc: $x=-1,-3,3$)
3. $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ (Soluc: $x=-2, \pm 3, 4$)
4. $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ (Soluc: $x=-4, 1$ doble, 3)
5. $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ (Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)
6. $3x^3+x^2-8x+4=0$ (Soluc: $x=-2, 1, 2/3$)
7. $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2, 3$)
8. $x^4-5x^2+4=0$ (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2$) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)
9. $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ (Soluc: $x=-3,-1,0,2$)
10. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ (Soluc: $x=1, \pm 2, -3$)
11. $x^3-5x^2-5x-6=0$ (Soluc: $x=6$)
12. $x^3+2x^2-2x-4=0$ (Soluc: $x=-2, \pm \sqrt{2}$)
13. $x^5-2x^4-x+2=0$ (Soluc: $x=\pm 1, 2$)
14. $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ (Soluc: $x=0, 1, 2, 3$)
15. $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ (Soluc: $x=-1,-3, 2/3, 3/2$)
16. $\frac{3-x}{2} = \frac{1}{x^2}$ (Soluc: $x=1, 1\pm\sqrt{3}$)
17. $x^3+3x^2-10x-24=0$ (Soluc: $x=-4,-2,3$)
18. $x^3+2x^2-15x-36=0$ (Soluc: $x=-3$ doble, 4)
19. $x^3-3x^2+3x-1=0$ (Soluc: $x=1$ triple)
20. $x^3-8=0$ (Soluc: $x=2$)

36. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces reales por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en $P(x)$

iii) Factorizar $P(x)$ a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

1. $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ (Soluc: $x=-2,-1$)
2. $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ (Soluc: $x=-2, 1/2, 1/3$)
3. $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ (Soluc: $x=-1, 2$)
4. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ (Soluc: $x=2, 3, \pm 1$)
5. $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ (Soluc: $x=1, 2$)
6. $P(x)=x^4-5x^2+4$ (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)
7. $P(x)=x^4-5x^2-36$ (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)

8. $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ (Soluc: $x=-1,3$)
9. $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ (Soluc: $x=2,-3$)
10. $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ (Soluc: $x=-1$ doble, $2,3$)
11. $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ (Soluc: $x=\pm 1, 4/3, 3/4$)
12. $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ (Soluc: $x=0, 1$)
13. $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ (Soluc: $x=1$)
14. $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ (Soluc: $x=\pm 1$)
15. $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ (Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)
16. $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ (Soluc: $x=1,2$ doble, -2)
17. $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ (Soluc: $x=1, -2, 2/3, -3/2$)
18. $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ (Soluc: $x=\pm 1, -3$ doble)

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales"

37. Resolver la ecuación $2x^3 - 3x^2 = -\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es $1/2$ (Soluc: $x=\pm 1/2, 3/2$)
38. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ (Sol: $x=2$)
39. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar Tartaglia y Ruffini... (Sol: $x=1$)
40. Resolver:

a) $\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \\ y - x^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$	(Soluc: $x=1, y=2$)	b) $\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y &= \sqrt{x^3} \end{aligned} \right\}$	(Soluc: $x=1; y=1$)
---	----------------------	---	----------------------
41. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones $x=-2, x=1$ y $x=3$
42. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2
43. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: $P(-1)=P(2)=P(-3)=0$ y $P(-2)=18$
44. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. (Soluc: 1 raíz)
45. Demostrar de dos formas (por Ruffini u operando directamente) que:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

El francés René Descartes (1596-1650) encontró un método para predecir el número de raíces de un polinomio ordenado: « La cantidad de raíces positivas de $f(x)=0$ es el número de variaciones del



signo de los coeficientes de $f(x)$ o disminuido en ese número en una cantidad par, y de raíces negativas es el número de variaciones del signo de los coeficientes de $f(-x)$ o disminuido en ese número en una cantidad par» (es importante insistir en que, para poder aplicar la regla, el polinomio $f(x)$ ha de estar ordenado).

Ejemplos:

$f(x)=x^2 + x -12$ tiene un cambio de signo, del 2º al 3º término $\Rightarrow$ tiene una raíz positiva (sus raíces son -4 y 3)

$f(x)=x^3 - 4x^2 + x + 6$ tiene dos cambios de signo $\Rightarrow$ tiene dos raíces positivas (raíces -1, 2 y 3)

$f(x)=x^4 - 5x^2 + 4$ tiene dos raíces positivas (raíces ± 1 y ± 2)

$f(x)=x^3 + 4x^2 + 3x$ no tiene cambios de signo $\Rightarrow$ no tiene raíces reales positivas (raíces 0, -1 y -3)

$f(x)=x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, ¿cuántas raíces positivas tiene como máximo?