

PROBLEMAS ALGEBRAICOS (SISTEMAS NO LINEALES)

- 1.- Calcular dos números positivos sabiendo que la diferencia es 12 y la suma de sus cuadrados es 170.
- 2.- Hallar dos números naturales sabiendo que su diferencia es 3 y su producto es 108.
- 3.- El área de un triángulo rectángulo es de 60 cm^2 y la suma de los catetos es 23 cm. Halla los lados.
- 4.- Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.
- 5.- Un campo rectangular tiene 2400 m^2 de superficie y 20 metros de longitud más que de anchura. Hallar las dimensiones del campo.
- 6.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y la suma de los catetos 14 cm. Halla el valor de los catetos.
- 7.- Calcular dos números tales que la suma de sus cuadrados es 100 y su producto es 48.
- 8.- Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.
- 9.- Hallar una fracción equivalente a un tercio tal que si se le añade 2 al numerador se convierte en un medio.
- 10.- Dos números suman 22 y la diferencia de sus cuadrados es 44. Calcula dichos números.

1.- Calcular dos números positivos sabiendo que la diferencia es 12 y la suma de sus cuadrados es 170.

Sean los números x, y

La diferencia es 12: $y - x = 12$

La suma de sus cuadrados es 170: $x^2 + y^2 = 170$

$$\left. \begin{array}{l} \text{La diferencia es 12: } y - x = 12 \\ \text{La suma de sus cuadrados es 170: } x^2 + y^2 = 170 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} y - x = 3 \\ xy = 108 \end{cases}$$

Despejamos y : $y - x = 12 \rightarrow y = 12 + x$

Sustituyendo en la otra ecuación: $x^2 + (12 + x)^2 = 170 \rightarrow x^2 + x^2 + 24x + 144 = 170 \rightarrow 2x^2 + 24x - 26 = 0$

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-13)}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm 14}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-12+14}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-12-14}{2} = -13 \end{cases}$$

Los números son 1 y 13.

2.- Hallar dos números naturales sabiendo que su diferencia es 3 y su producto es 108.

Sean los números x, y

La diferencia es 3: $y - x = 3$

Su producto es 108: $x(3 + x) = 108$

$$\left. \begin{array}{l} \text{La diferencia es 3: } y - x = 3 \\ \text{Su producto es 108: } x(3 + x) = 108 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} y - x = 3 \\ xy = 108 \end{cases}$$

Despejamos y : $y = 3 + x$

Sustituyendo en la otra ecuación: $x(3 + x) = 108 \rightarrow 3x + x^2 - 108 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-108)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 21}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3+21}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{-3-21}{2} = -12 \end{cases}$$

Los números son (9, 12)

3.- El área de un triángulo rectángulo es de 60 cm^2 y la suma de los catetos es 23 cm. Halla los lados.

Sean los catetos: x, y

La suma de catetos es 23: $x + y = 23$

Área es 60: $\frac{xy}{2} = 60 \rightarrow xy = 120$

$$\left. \begin{array}{l} \text{La suma de catetos es 23: } x + y = 23 \\ \text{Área es 60: } \frac{xy}{2} = 60 \rightarrow xy = 120 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} y + x = 23 \\ xy = 120 \end{cases}$$

Despejamos y : $y = 23 - x$

Sustituyendo en la otra ecuación: $x(23 - x) = 120 \Rightarrow x^2 - 23x + 120 = 0$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 120}}{2 \cdot 1} = \frac{23 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{23+7}{2} = 15 \\ x_2 = \frac{23-7}{2} = 8 \end{cases}$$

Los catetos miden 8 y 15 cm, por tanto, la hipotenusa mide: $h^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow h = 17 \text{ cm}$

Medida de los lados: 8, 15 y 17 cm

4.- Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

Sean $x =$ ancho ; $y =$ largo

Perímetro es 110 : $x + y = 55$

Área es 750 : $xy = 750$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Perímetro es } 110: x + y = 55 \\ \text{Área es } 750: xy = 750 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} y + x = 55 \\ xy = 750 \end{cases}$$

Despejamos y : $y = 55 - x$

Sustituyendo en la otra ecuación: $x(55 - x) = 750 \rightarrow 55x - x^2 = 750 \Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 750}}{2 \cdot 1} = \frac{55 \pm 25}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{55+25}{2} = 40 \Rightarrow y = 40 - 15 = 25 \\ x_2 = \frac{55-25}{2} = 15 \Rightarrow y = 40 - 25 = 15 \end{cases}$$

Las dimensiones son 25×15

5.- Un campo rectangular tiene 2400 m^2 de superficie y 20 metros de longitud más que de anchura. Halla las dimensiones.

Sea $x =$ anchura $y =$ largo del rectángulo

Largo = $20 +$ ancho: $y = x + 20$

Área es 2400 : $xy = 2400$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Largo} = 20 + \text{ancho: } y = x + 20 \\ \text{Área es } 2400: xy = 2400 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} y = x + 20 \\ xy = 2400 \end{cases}$$

Sustituyendo y en la segunda ecuación: $x(x + 20) = 2400 \rightarrow x^2 + 20x - 2400 = 0$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-2400)}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 100}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-20+100}{2} = 40 \\ x_2 = \frac{-20-100}{2} = -60 \quad \text{!!!!} \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son $60 \times 40 \text{ m}$

6.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y la suma de los catetos 14 cm . Halla el valor de los catetos.

Sea x e y las medidas de los catetos.

Suma catetos es 14 : $x + y = 14$

La hipotenusa es 10 cm : $10^2 = x^2 + y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Suma catetos es } 14: x + y = 14 \\ \text{La hipotenusa es } 10 \text{ cm: } 10^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \text{El sistema es: } \begin{cases} 14 = x + y \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}$$

Despejamos y : $y = 14 - x$

Sustituyendo y en la segunda ecuación: $10^2 = x^2 + (14 - x)^2$

$100 = x^2 + 196 - 28x + x^2 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{14+2}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{14-2}{2} = 6 \end{cases}$$

La medida de los catetos son 6 y 8 cm .

7.- Calcular dos números tales que la suma de sus cuadrados es 100 y su producto es 48.

Sean x e y los dos números.

La suma de sus cuadrados es 100: $x^2 + y^2 = 100$

Su producto es 48: $xy = 48$

Planteamos el sistema:
$$\begin{cases} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Despejando de la primera: $y = \frac{48}{x}$

Sustituyendo en la segunda obtenemos una ecuación bicuadrada:

$$x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100 \Rightarrow x^4 - 100x^2 + 2304 = 0 \quad (z = x^2) \Rightarrow z^2 - 100z + 2304 = 0$$

$$z = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2304}}{2 \cdot 1} = \frac{100 \pm 28}{2} = \begin{cases} z_1 = \frac{100+28}{2} = 64 \Rightarrow x_1 = \pm 8 \\ z_2 = \frac{100-28}{2} = 36 \Rightarrow x_2 = \pm 6 \end{cases}$$

Los números son los pares (8, 6) y (-8, -6)

8.- Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

Sean x = ancho ; y = largo

Perímetro es 110: $x + y = 55 \Rightarrow$

Área es 750: $xy = 750$

Planteamos el sistema:
$$\begin{cases} x + y = 55 \\ xy = 750 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación: $x + y = 55 \Rightarrow y = 55 - x$

Planteamos la ecuación: $x(55 - x) = 750$

$$55x - x^2 = 750 \Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$$

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 750}}{2 \cdot 1} = \frac{55 \pm 25}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{55+25}{2} = 40 \Rightarrow y = 40 - 15 = 25 \\ x_2 = \frac{55-25}{2} = 15 \Rightarrow y = 40 - 25 = 15 \end{cases}$$

Las dimensiones son 25 x 15

9.- Hallar una fracción equivalente a un tercio tal que si se le añade 2 al numerador se convierte en un medio.

Sea x = numerador y = denominador

Fracción equivalente a un tercio: $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 3x$

Al añadir 2 al numerador es igual a un medio: $\frac{x+2}{y} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2(x+2)$

Igualando ambas ecuaciones: $3x = 2(x+2) \rightarrow 3x = 2x + 4 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 12$

La fracción es $\frac{4}{12}$.

10.- Dos números suman 22 y la diferencia de sus cuadrados es 44. Calcula dichos números.

Sean x e y los dos números.

$$\text{Suman 22: } x + y = 22$$

$$\text{La diferencia de sus cuadrados es 44: } x^2 - y^2 = 44$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 22 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{array} \right\} \text{Planteamos el sistema:}$$

$$\text{Despejando en la primera ecuación: } x + y = 22 \rightarrow y = 22 - x$$

$$\text{Planteamos la ecuación: } x^2 - (22 - x)^2 = 44$$

$$x^2 - (x^2 - 44x + 484) = 44 \rightarrow 44x - 484 = 44 \rightarrow 44x = 528 \rightarrow x = 12$$

Por tanto, los números son 12 y 10.