

Factorización de polinomios

15 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

16 Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:

a) $2x^2 - 9x - 5$

b) $3x^2 - 2x - 5$

c) $4x^2 + 17x + 15$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

b) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

c) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

d) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

17 Sacar factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

18 Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

19 Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

a)	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -15 & 12 & \\
 1 & & 3 & -12 & \\
 \hline
 & 3 & -12 & 0 & \\
 4 & & 12 & & \\
 \hline
 & 3 & 0 & &
 \end{array}$$

$$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x-1)(x-4)$$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 15 & -7 \\
 1 & & 1 & -8 & 7 \\
 \hline
 & 1 & -8 & 7 & 0 \\
 1 & & 1 & -7 & \\
 \hline
 & 1 & -7 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x-1)^2(x-7)$$

Sus raíces son 1 y 7.

$$d) x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

Sus raíces son 2, -2, 3 y -3.

20 Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -2 & -3 \\
 3 & & 3 & 3 & 3 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$$

Raíz: 3

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & -19 & 60 \\
 -3 & & -6 & 39 & -60 \\
 \hline
 & 2 & -13 & 20 & 0 \\
 4 & & 8 & -20 & \\
 \hline
 & 2 & -5 & 0 &
 \end{array}$$

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x+3)(x-4)(2x-5)$$

Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -1 & -6 \\
 2 & & 2 & 4 & 6 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 0
 \end{array}$$

$$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$$

Raíz: 2

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\
 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\
 \hline
 & 4 & 8 & 5 & 1 & 0 \\
 -1 & & -4 & -4 & -1 & \\
 \hline
 & 4 & 4 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 &= \\
 &= (x-1)(x+1)(4x^2 + 4x + 1) = \\
 &= (x-1)(x+1)(2x+1)^2
 \end{aligned}$$

Raíces: 1, -1 y $-\frac{1}{2}$

21 Escribe, en cada caso, un polinomio de segundo grado que tenga por raíces:

a) 7 y -7

b) 0 y 5

c) -2 y -3

d) 4 (doble)

Por ejemplo:

a) $(x-7)(x+7) = x^2 - 49$

b) $x(x-5) = x^2 - 5x$

c) $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

d) $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

22 ▽▽▽ Escribe, en cada caso, un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$

a) $(x-1)(x+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x(x-2)(x+1) = x^3 - x^2 - 2x$

23 ▽▽▽ Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:

a) De segundo grado sin raíces.

b) Que tenga por raíces -1 , 0 y 3 .

c) De tercer grado con una sola raíz.

Por ejemplo:

a) $x^2 + 1$

b) $x(x+1)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $x(x^2 + 1) = x^3 + x$

Fracciones algebraicas

24 ▽▽▽ Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$

d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

25 ▽▽▽ Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

26 ▽▽▽ Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{6-x+3x}{3x^2} = \frac{2x+6}{3x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4}$

27 ▼▼▼ Efectúa.

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 \quad \text{b) } \frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} \quad \text{c) } \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} \quad \text{d) } \frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$$

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2 + 6 - 2x}{2x}$$

$$\text{b) } \frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6 - x(x+1)}{3x^2} = \frac{6 - x^2 - x}{3x^2}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 - 3x}$$

$$\text{d) } \frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3) - x(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-9 - x}{x^2 + 4x + 3}$$

28 ▼▼▼ Opera.

$$\text{a) } \frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{b) } \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} \quad \text{c) } \frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} \quad \text{d) } \frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3}$$

$$\text{a) } \frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2 + x}{3x-3}$$

$$\text{b) } \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$$

$$\text{d) } \frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2 + 6x}{2x^2 - x - 3}$$

29 ▼▼▼ Opera y simplifica si es posible.

$$\text{a) } \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{x}{2} \quad \text{b) } \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x}$$

$$\text{a) } \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)} \right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

30 ▼▼▼ Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

$$\text{a) } \frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} \quad \text{b) } \frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} \quad \text{c) } \frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} \quad \text{d) } \frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$$

$$\text{a) } \frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$$

$$\text{c) } \frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$$

$$\text{d) } \frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$$