EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 4 y 5

1. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación $x-2-\frac{2x+3}{5}<\frac{1}{2}$. Representa gráficamente el intervalo solución.

2. (0,8 puntos) Resuelve la inecuación $x^2-8x\geq 0$.

3. (1 punto) Resuelve la inecuación $\frac{x-3}{x+1}<2$.

4. a) (1,5 puntos) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x+2y\leq 20 \\ 3x-y\geq 6 \end{cases}$$

Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0,5 puntos) De los puntos *P*(1, 2), *Q*(4, 1), *R*(10, 6) y *S*(5, 12) indica los que no sean solución, explicando el porqué.

5. (2,5 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,4 puntos) $8^{2x}=1024$

b) (0,4 puntos) $\log_5 500=x$

c) (0,8 puntos) $\log(2x-8)+\log(x+1)=2$

d) (0,9 puntos) $9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

6. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 6 años para 20000 euros al 3%, si los intereses se abonan mensualmente.

7. (1 punto) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 10 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?

Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2016 a 2025; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2026.

Dato: $C=\frac{a(1+r)\left[(1+r)^t-1\right]}{r}$.

8. (1 punto) ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años 12000 euros?

Alcalá de Henares, 2 de diciembre de 2015.

JoséMMM

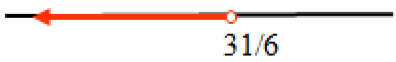
Soluciones

1. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación $x-2-\frac{2x+3}{5}<\frac{1}{2}$. Representa gráficamente el intervalo solución.

Solución:

$$x-2-\frac{2x+3}{5}<\frac{1}{2} \Rightarrow (\times 10) \Rightarrow 10x-20-2(2x+3)<5 \Rightarrow 10x-20-4x-6<5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6x<31 \Rightarrow x<31/6$. Intervalo $(-\infty, 31/6)$:



2. (0,8 puntos) Resuelve la inecuación $x^2-8x\geq 0$.

Solución:

$x^2-8x\geq 0 \Rightarrow x(x-8)\geq 0$. Hay que tener en cuenta el signo de los factores x y $x-8$.

- Si $x<0$, como ambos factores son negativos, el producto $x(x-8)>0$.
- Si $0<x<8$, el, primer factor es positivo, pero el segundo es negativo $\Rightarrow x(x-8)<0$.
- Si $x>8$, como ambos factores son positivos, el producto $x(x-8)>0$.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$.

3. (1 punto) Resuelve la inecuación $\frac{x-3}{x+1}<2$.

Solución:

$$\frac{x-3}{x+1}<2 \Rightarrow \frac{x-3}{x+1}-2<0 \Rightarrow \frac{x-3-2(x+1)}{x+1}<0 \Rightarrow \frac{-x-5}{x+1}<0.$$

Hay que estudiar los signos del numerador y denominador de la fracción algebraica. (El numerador se anula en $x=-5$; el denominador, en $x=-1$).

- Si $x<-5$: el numerador es positivo; el denominador, negativo $\Rightarrow$ cociente negativo.
- Si $-5<x<-1$: ambos términos son negativos $\Rightarrow$ cociente positivo.
- Si $x>-1$: el numerador es negativo; el denominador, positivo $\Rightarrow$ cociente negativo.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$.

4. a) (1,5 puntos) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x+2y\leq 20 \\ 3x-y\geq 6 \end{cases}$$

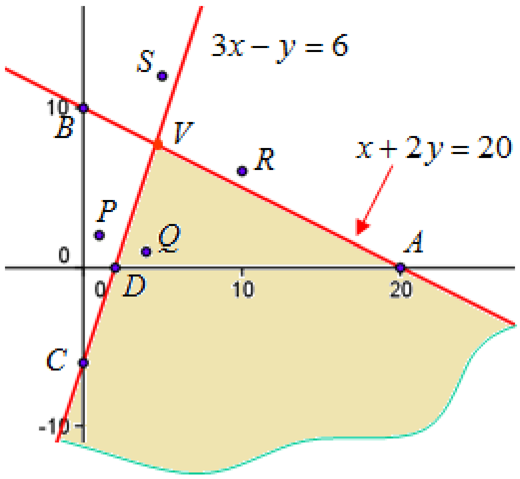
Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0,5 puntos) De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(10, 6)$ y $S(5, 12)$ indica los que no sean solución, explicando el porqué.

Solución:

a) La inecuación $x+2y\leq 20$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $x+2y=20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $A((20, 0)$ y $B(0, 10)$

$\rightarrow$ La inecuación $3x-y\geq 6$ determina el semiplano que está a la derecha de la recta $3x-y=6$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $C(0, -6))$ y $D(2, 0)$



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y=20 \\ 3x-y=6 \end{cases}$. Su solución es $V\left(\frac{32}{7}, \frac{54}{7}\right)$.

b) El único punto que cumple las dos inecuaciones es $Q(4, 1)$; los otros tres no son de la región de soluciones.
→ $P(1, 2)$ no cumple la inecuación $3x - y \geq 6$.
→ $R(10, 6)$ no cumple la inecuación $x + 2y \leq 20$.
→ $S(5, 12)$ no cumple ninguna de la inecuaciones dadas.

5. (2,5 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) (0,4 puntos) $8^{2x} = 1024$ b) (0,4 puntos) $\log_5 500 = x$
c) (0,8 puntos) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2$ d) (0,9 puntos) $9^x - 4{\cdot}3^{x+1} + 27 = 0$
Solución:
a) $8^{2x} = 1024 \Rightarrow (2^3)^{2x} = 2^{10} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{10} \Rightarrow 6x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.
De otra manera (aplicando logaritmos):
$8^{2x} = 1024 \Rightarrow \log(8^{2x}) = \log 1024 \Rightarrow 2x\log 8 = \log 1024 \Rightarrow x = \frac{\log 1024}{2\log 8} = 1,666...$

b) $\log_5 500 = x \Rightarrow 5^x = 1420 \Rightarrow \log 5^x = \log 500 \Rightarrow x\log 5 = \log 500 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\log 500}{\log 5} = 3,861353$.
Si se conoce la fórmula de cambio de base la respuesta es inmediata: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

c) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2 \Rightarrow \log[(2x-8)(x+1)] = \log 100 \Rightarrow (2x-8)(x+1) = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 108 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4{\cdot}2{\cdot}(-108)}}{2{\cdot}2} = \frac{6 \pm 30}{4} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$
(La solución $x = –6$ no es válida).

d) $9^x - 4{\cdot}3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 4{\cdot}3{\cdot}3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 12{\cdot}3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x = t) \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4{\cdot}27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$
Si $t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.
Si $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

6. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 6 años para 20000 euros al 3%, si los intereses se abonan mensualmente.
Solución:

La expresión que da el capital acumulado es $C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, siendo r la tasa de interés, t el tiempo en años y n el número de periodos anuales.
En este caso, C_0 = 20000 €, el 3% es una tasa de r = 0,03 y $t = 6 \Rightarrow$ 72 meses.
Si el interés se abona mensualmente (n = 12):

$$C = 20000\cdot\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{12\cdot 6} = 23938,97\ €$$

7. (1 punto) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 10 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?
Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2016 a 2025; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2026.

Dato: $C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}$.

Solución:
$\to$ a es la aportación anual: M = 3000; r = 0,06; t = 10.

$$C = \frac{3000\cdot 1,06\left[(1,06)^{10} - 1\right]}{0,06} = \frac{3000\cdot 1,06\cdot 0,79085}{0,06} = 41914,05\ €$$

8. (1 punto) ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años 12000 euros?
Solución:
$\to$ a es la aportación anual debe cumplirse que:

$$12000 = \frac{a\cdot 1,13\left[(1,13)^5 - 1\right]}{0,13} = \frac{a\cdot 1,13\cdot 0,84244}{0,113} \Rightarrow \frac{12000\cdot 0,13}{1,13\cdot 0,84244} = a \Rightarrow a = 1638,73\ €$$

Alcalá de Henares, 2 de diciembre de 2015. JoséMMM