4 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Propuesta A

1. Dadas las siguientes ecuaciones, determina previamente el número de soluciones y resuélvelas cuando sea posible.

a) $12x^2 + 15x - 18 = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $4x^2 - 13 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $x^3 - 21x + 20 = 0$

b) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x = 0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{24}{x^2-16}$

b) $\dfrac{2x^2-2x-1}{2x} = \dfrac{3x^2-2x}{3x+1}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $x + \sqrt{x+1} = 5$

b) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

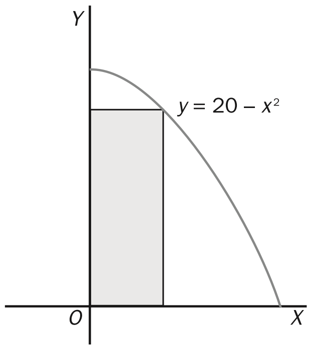
a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2x + 4y - 3z = -4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

7. La suma de dos números es 22 y la suma de sus cuadrados 274. Halla ambos números.

8. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose en total 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. Averigua cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

9. Se quiere dibujar un rectángulo en el primer cuadrante, limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de la parábola $y = 20 - x^2$.



Calcula las dimensiones del rectángulo si su área tiene que ser de 16 unidades cuadradas.

Propuesta B

1. Determina los valores de m para los cuales la siguiente ecuación de segundo grado $3mx^2 - 4mx + m + 1 = 0$ tiene una única solución.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $x^4 - 1 = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x = 9$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} = 0$

b) $\dfrac{x + 3}{x - 1} + \dfrac{x + 4}{x + 1} = 7$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{3 + 2x} = 1$

b) $\dfrac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 4}} = 5$

5. Una ecuación lineal con dos incógnitas de la forma $ax + by = c$ es la expresión de una recta. Explica razonadamente si las rectas dadas por las ecuaciones de los siguientes sistemas son paralelas, secantes o coincidentes y a continuación compruébalo representando gráficamente las rectas.

a) $\begin{cases} 2x - y = -15 \\ -6x + 3y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 7y = -2 \\ -10x + 14y = 18 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

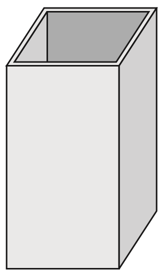
a) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = 9 \\ x + 3y + z = 7 \end{cases}$

7. Calcula tres números enteros impares consecutivos sabiendo que el doble de la suma de los dos primeros es inferior en una unidad al triple del último número.

8. En el mismo instante, dos trenes parten de la misma estación en sentido contrario. Calcula la velocidad de cada uno sabiendo que al cabo de 4 horas los separan 1188 kilómetros y la velocidad de uno de ellos es 3 km/h inferior al doble de la del otro (se supone que las velocidades de los trenes son constantes).

9. Se dispone de 68 m^2 de chapa para construir un depósito de 32 m^3, con forma de prisma de base cuadrada sin cubrir.



Calcula los posibles valores del lado de la base y de la altura del depósito.

Soluciones propuesta A

1. a) $12x^2 + 15x - 18 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 22 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

b) $x^2\,4x + 4 = \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ Una solución: $x = \dfrac{-4}{2} = -2$

c) $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\,0 \Rightarrow$ No tiene ninguna solución real.

d) $5x^2 - 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4 \cdot 5 \cdot (-13) > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones: $x = \pm\sqrt{\dfrac{13}{4}}$

2. a) $x^3 - 21x + 20 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 4,\ x = -5$

b) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 = 50x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3,\ x = 4$

3. a) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{24}{x^2-16} \Rightarrow \dfrac{(x+4)^2}{x^2-16} - \dfrac{(x-4)^2}{x^2-16} = \dfrac{24}{x^2-16} \Rightarrow (x+4)^2 - (x-4)^2 = 24 \Rightarrow 16x = 24 \Rightarrow x = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{2x^2-2x-1}{2x} = \dfrac{3x^2-2x}{3x+1} \Rightarrow (2x^2-2x-1)(3x+1) = (3x^2-2x)2x \Rightarrow 6x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 6x^3 - 4x^2 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{5}$

En ambos casos las soluciones son válidas, porque no anulan ninguno de los denominadores.

4. a) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{7+2x}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3+x}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{3+x} = 3 + x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,\quad x = -3$

$x = 1 \Rightarrow \sqrt{7+2} - \sqrt{3+1} = 1 \Rightarrow x = 1$ sí es solución. $\quad x = -3 \Rightarrow \sqrt{7-6} - \sqrt{3-3} = \Rightarrow x = -3$ sí es solución.

b) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = 3 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 3 \Rightarrow \dfrac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 = (3-x)^2$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{5}{3}+1} + \sqrt{\frac{5}{3}-1}}{\sqrt{\frac{5}{3}+1} - \sqrt{\frac{5}{3}-1}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 3 \Rightarrow \text{La solución es } x = \frac{5}{3}.$$

5. a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 5y = 25 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0$

Es un sistema compatible indeterminado. Como $y = 2x - 5$, las soluciones son de la forma $(t, 2t - 5)$.

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases} \Rightarrow 0 = 11$

El sistema es incompatible.

6. a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - 2E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 2 \\ -2y - 2z = -8 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - \frac{E_2}{2}]{\frac{E_2}{-2}} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = -1 \\ -3z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - y = 1 \\ y = -1 + z = 2 \Rightarrow \text{Solución: } x = 1, y = 2, z = 3 \\ z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2x + 4y - 3z = -4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 + E_1} \begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ 3y - 4z = 1 \\ -2y + z = -4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 + 4E_3} \begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -5y = -15 \\ -2y + z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + y + z}{2} = 5 \\ y = 3 \\ z = -4 + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x = 5, y = 3, z = 2$

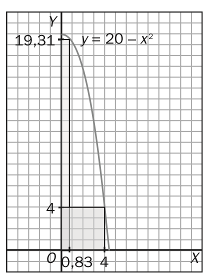
7. $\begin{cases} x + y = 22 \\ x^2 + y^2 = 274 \end{cases} \Rightarrow y = 22 - x \Rightarrow x^2 + (22 - x)^2 = 274 \Rightarrow 2x^2 - 44x + 210 = 0 \begin{cases} x = 7 \Rightarrow y = 15 \\ x = 15 \Rightarrow y = 7 \end{cases} \Rightarrow$ Los números son 7 y 15

8. $\begin{cases} h + m + n = 20 \\ h + m = 3n \\ m + 1 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m + n = 20 \\ h + m - 3n = 0 \\ -h + m = -1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 + E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} h + m + n = 20 \\ -4n = -20 \\ 2m + n = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m + 5 = 20 \\ n = 5 \\ 2m = 19 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 8 \\ n = 5 \\ m = 7 \end{cases}$

Han ido 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

9. $\begin{cases} y = 20 - x^2 \\ xy = 16 \end{cases} \Rightarrow x(20 - x^2) = 16 \Rightarrow x^3 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x^2 + 4x - 4) = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$

La solución $x = -2 - \sqrt{2}$ no es válida por ser negativa, por tanto, se obtienen dos posibles rectángulos: $x = 4,\ y = 4;\ x = -2 + 2\sqrt{2} \cong 0{,}83,\ y = \dfrac{16}{-2 + 2} \approx 19{,}31.$



Soluciones propuesta B

1. El discriminante debe ser 0:

$\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot 3\, m\, (m + 1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 12m^2 - 12m = 0 \Rightarrow 4m\,(m - 3) = 0 \Rightarrow m = 0,\ m = 3$

La solución $m = 0$ no es válida porque la ecuación no sería de segundo grado, luego la única solución es $m = 3$.

2. a) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)\,(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)\,(x + 3)\,(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -3,\ x = 1$

3. a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2,\ \ x = 3$

b) $\dfrac{x + 3}{x - 1} + \dfrac{x + 4}{x + 1} = 7 \Rightarrow (x+3)\,(x+1) + (x+4)\,(x-1) = 7\,(x^2 - 1) \Rightarrow 5\,x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = \dfrac{-3}{5}$

Se comprueba que todas las soluciones son válidas porque ninguna anula los denominadores de las fracciones.

4. a) $\sqrt{x+7} - \sqrt{2x} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}\right)^2 = \left(\sqrt{2x} + 1\right)^2 \Rightarrow (6 - x)^2 = \left(2\sqrt{2x}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow x = 18,\ \ x = 2$

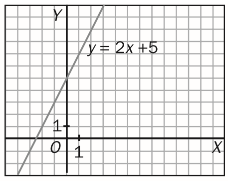
$x = 18 \Rightarrow \sqrt{18+7} - \sqrt{2 \cdot 18} = -1 \neq 1 \Rightarrow x = 18$ no es solución. $\ x = 2 \Rightarrow \sqrt{2+7} - \sqrt{2 \cdot 2} = 1 \Rightarrow x = 2$ sí es solución.

b) $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-4}} = 5 \Rightarrow \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(5\sqrt{x-4}\right)^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{x^2+3x-4}\right)^2 = (23x - 103)^2 \Rightarrow 525x^2 - 4750x + 10\,625 = 0 \Rightarrow$

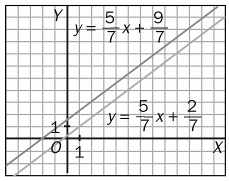
$\Rightarrow 21x^2 - 190x + 425 = 0 \Rightarrow x = 5,\ \ x = \dfrac{85}{21}$

$x = 5 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5+4} + \sqrt{5-1}}{\sqrt{5-4}} = \dfrac{3+2}{1} = 5 \Rightarrow x = 5$ sí es solución. $x = 18 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{18+4} + \sqrt{18-1}}{\sqrt{18-4}} \neq 5 \Rightarrow x = 18$ no es solución.

5. a) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -6x + 3y = 15 \end{cases}$ Las dos ecuaciones son equivalentes, ya que la segunda ecuación se obtiene multiplicando por -3 todos los términos de la primera. Por tanto todos los pares (x, y) que satisfacen una de las ecuaciones, satisfacen también la otra. El sistema es compatible indeterminado. Las rectas tienen infinitos puntos en común, son coincidentes.



b) $\begin{cases} 5x - 7y = -2 \\ -10x + 14y = 18 \end{cases}$ Si se multiplica la primera ecuación por -2, se obtiene $-10x + 14y = 4$, mientras que según la segunda ecuación $-10x + 14y = 18$. El sistema es incompatible, las rectas no tienen ningún punto en común, son paralelas.



6. a) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \xRightarrow[E_3 - E_1]{E_2 + E_1} \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -y - z = 0 \\ 7y + z = -6 \end{cases} \xRightarrow{E_2 + E_1} \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 6y = 26 \\ 7y + z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2y - z \\ y = -1 \\ z = -6 - 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = 9 \\ x + 3y + z = 7 \end{cases} \xRightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y - 4z = 7 \\ y - 2z = 5 \end{cases} \xRightarrow{E_3 - E_2} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y - 4z = 7 \\ 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - 3z = -1 \\ y = 7 + 4z = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

7. Sean $2n + 1$, $2n + 3$ y $2n + 5$ los tres números: $2\,(2n + 1 + 2n + 3) = 3\,(2n + 5) - 1 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$ Los números son 7, 9 y 11.

8. La relación entre las velocidades es: $v_1 = 2v_2 - 3$. Por otro lado el espacio que separa los trenes al cabo de 4 horas es $e_1 + e_2 = 4v_1 + 4v_2 = 1188$ km. Resolviendo el sistema se obtiene $v_1 = 197$ km/h, y $v_2 = 100$ km/h.

9. Sea x la base e y la altura, expresadas en m: $\begin{cases} x^2 + 4xy = 68 \\ x^2 y = 32 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{32}{x^2} \Rightarrow x^2 + 4x\dfrac{32}{x^2} = 68 \Rightarrow x^3 - 68x + 128 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)\,(x^2 + 2x - 64) = 0\ \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 8 \\ x^2 + 2x - 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{65} & \text{(No es una solución válida por ser negativa)} \\ x = -1 + \sqrt{65} \approx 7{,}06 \Rightarrow y \approx 4{,}53 \end{cases} \end{cases}$