

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

■ 1. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 5$

c) $\log_{25} 5$

e) $\log_{1/4} 64$

b) $\log_5 25$

d) $\log_4 64$

f) $\log_{1/2} \sqrt[3]{4}$

■ 2. Utilizando la definición de logaritmo, calcula x en cada uno de los apartados:

a) $\log_x 1\,000 = 3$

c) $\log_2 x = 3$

e) $\log_x 32 = -5$

b) $\log_3 27 = x$

d) $\log_2 \frac{1}{16} = x$

f) $\log x = 2$

■ 3. Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes logaritmos:

a) $\log 7$

d) $\ln 5$

g) $\log (1,5 \cdot 10^8)$

b) $\log \frac{1}{2}$

e) $\ln \frac{1}{4}$

h) $\ln (2,3 \cdot 10^7)$

c) $\log 12$

f) $\ln \sqrt{5}$

i) $\ln (7 \cdot 10^{-5})$

■ 4. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin hacer uso de la calculadora:

a) $\log_2 24 - \log_2 3$

c) $\log_3 45 - \log_3 3 + \log_3 81 - \log_3 15$

e) $\frac{1}{2} \log_2 36 + \log_3 \frac{1}{2}$

b) $\log_6 3 + \log_6 4 + \log_6 18$

d) $2 \log_5 10 - \log_5 4$

f) $\frac{3 \log_2 48 - \log_2 27}{2}$

■ 5. Expresa como un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a) $2 \log_2 M - 3 \log_2 N$

c) $\frac{3}{4} \log M - \frac{2}{5} \log N$

b) $\ln M + 2 \ln N - \ln P$

d) $\frac{2}{3} \ln M - \ln N - \frac{3}{2} \ln P$

■ 6. Halla el valor de x en cada caso, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log x = \log 75 - \log 3$

c) $\ln x = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 9$

b) $\log x = 4 \log 3 + 3 \log 4$

d) $\ln x = \frac{1}{2} \ln 36 + 3 \ln 2 - \ln 9$

■ 7. Expresa los siguientes logaritmos como cocientes de logaritmos decimales y halla sus valores con la calculadora:

a) $\log_2 5$

c) $\log_{0,3} 0,6$

e) $\log_{0,25} \frac{2}{5}$

b) $\log_5 2$

d) $\log_3 (6)^2$

f) $\log_{2/3} \frac{4}{5}$

■ 8. Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcula:

a) $\log 6$

e) $\log 300$

i) $\log_5 9$

b) $\log 5$

f) $\log 0,5$

j) $\log 0,03$

c) $\log 12$

g) $\log_3 2$

k) $\log 1\,200$

d) $\log 18$

h) $\log_2 27$

l) $\log 0,45$

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -3 f) $-\frac{2}{3}$

2. En cada caso queda:

a) $x=10$ b) $x=3$ c) $x=8$ d) $x=-4$ e) $x=\frac{1}{2}$ f) $x=100$

3. En cada caso queda:

a) 0,85 b) -0,3010 c) 1,08 d) 1,609 e) -1,39
f) 0,805 g) 8,18 h) 16,95 i) -9,57

4. En cada caso queda:

a) 3 b) 3 c) 4 d) 2 e) 1,95 f) 6

5. En cada caso queda:

a) $\log_2\left(\frac{M^2}{N^3}\right)$ b) $\ln\left(\frac{M \cdot N^2}{P}\right)$ c) $\log\left(\frac{M^{\frac{3}{4}}}{N^{\frac{2}{5}}}\right)$ d) $\ln\left(\frac{M^{\frac{2}{3}}}{N \cdot P^{\frac{3}{2}}}\right)$

6. En cada caso queda:

a) $x=25$ b) $x=5184$ c) $x=1$ d) $x=\frac{48}{9}$

7. En cada caso queda:

a) $\frac{\log 5}{\log 2}=2,32$ b) $\frac{\log 2}{\log 5}=0,43$ c) $\frac{\log 0,6}{\log 0,3}=0,42$
d) $\frac{2 \cdot \log 6}{\log 3}=0,85$ e) $\frac{\log 2 - \log 5}{-\log 4}=0,66$ f) $\frac{\log\left(\frac{4}{5}\right)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}=0,55$

8. Las soluciones son:

a) $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0,78$

b) $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0,70$

c) $\log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 1,08$

d) $\log 18 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 1,26$

e) $\log 300 = \log 3 + \log 100 = 2,48$

f) $\log 0,5 = \log 1 - \log 2 = -0,30$

g) $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63$

h) $\log_2 27 = \frac{3 \cdot \log 3}{\log 2} = 4,75$

i) $\log_5 9 = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 5} = 1,36$

j) $\log 0,03 = \log 3 - \log 100 = -1,52$

k) $\log 1200 = \log 12 + \log 100 = 3,08$

l) $\log 0,45 = 2 \cdot \log 3 - \log 2 - \log 10 = -0,35$

- 9. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 1,8 euros. Contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?
- ¿Cuánto costaba hace 4 años?
- ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?

- 10. El servicio de control de calidad de una gran empresa que fabrica cierta marca de televisores ha comprobado que el porcentaje de televisores que sigue funcionando al cabo de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$:

- ¿Qué proporción de televisores siguen funcionando después de 5 años? ¿Y después de 15 años? ¿Y al cabo de 20 años?
- ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40% de los televisores fabricados?



- 11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

- $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$
- $3^x \cdot 9^x = 9^3$
- $2^{-x} = 8^{3-x}$
- $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$
- $6^{1-x} + 6^x = 7$
- $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$
- $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$
- $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
- $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$
- $2^{x^2-5x} = 64^{-1}$

- 12. Resuelve los siguientes sistemas:

- $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x \cdot 4^y = 256 \end{cases}$

- 13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- $2 \log_2 x - \log_2 (x - 16) = \log_2 4$
- $\log x = 1 + \log (22 - x)$
- $2 \log (5x + 4) - \log 4 = \log (x + 4)$
- $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$
- $\ln (2x - 3) + \ln (5 - x) = \ln 5$
- $\ln x = \ln 2 + 2 \ln (x - 3)$

- 14. Resuelve los siguientes sistemas:

- $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} \log \left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} \log x - \log y = 3 \log 5 \\ \log x + \log y = \log 5 \end{cases}$



SOLUCIONES

9. En cada apartado queda:

a) El producto dentro de 4 años costará: $1,8 \cdot 1,05^4 = 2,19$ euros.

b) Hace 4 años costaba: $1,8 \cdot 1,05^{-4} = 1,48$ euros.

c) Llamando t al número de años que han de pasar obtenemos:

$$3,6 = 1,8 \cdot 1,05^t \Rightarrow 2 = 1,05^t \Rightarrow \text{Tomando logaritmos: } t = \frac{\log 2}{\log 1,05} = 14,21 \text{ años.}$$

Por tanto, han de pasar casi 15 años.

10. En cada apartado queda:

a) Al cabo de 5 años funcionan $\left(\frac{8}{9}\right)^5 = 0,55$, el 55% de los televisores.

Después de 15 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{15} = 0,17$, es decir, el 17% de los televisores.

Al cabo de 20 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{20} = 0,09$, es decir, el 9% de los televisores.

b) Deberían pasar t años y se debe cumplir:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^t = 0,4 \Rightarrow t = \frac{\log 0,4}{\log\left(\frac{8}{9}\right)} = 7,8 \Rightarrow \text{Deberán pasar casi 8 años.}$$

11. La solución de cada ecuación es:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2} \Rightarrow x_1 = 9 \text{ y } x_2 = -1$

b) $3^x \cdot 9^x = 9^3 \Rightarrow 3^{3x} = 3^6 \Rightarrow x = 2$

c) $2^{-x} = 8^{3-x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{9-3x} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7 \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 7 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

e) $6^{1-x} + 6^x = 7 \Rightarrow \frac{6}{6^x} + 6^x = 7 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 1$

f) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 320 = 0 \Rightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 80 = 0 \Rightarrow x = 3$

g) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1 \Rightarrow 2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{4} = 1 \Rightarrow 2^x = \frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{4}{7}\right)}{\log 2} = -0,81$

h) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$i) 5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x} \Rightarrow 5 \cdot 5^x = 10 + \frac{75}{5^x} \Rightarrow x=1$$

$$j) 2^{x^2-5x} = 64^{-1} \Rightarrow 2^{x^2-5x} = 2^{-6} \Rightarrow x_1=2 \text{ y } x_2=3$$

12. Los sistemas quedan:

$$a) \begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases} \Rightarrow \text{Haciendo } \begin{cases} 3^x = a \\ 3^y = b \end{cases} \text{ obtenemos } \begin{cases} a+b=36 \\ a \cdot b=243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=27 \text{ y } b=9 \Rightarrow x=3; y=2 \\ a=9 \text{ y } b=27 \Rightarrow x=2; y=3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 5^y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x \cdot 4^y = 256 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

13. Las soluciones quedan:

$$a) \log_2 \left[\frac{x^2}{x-16} \right] = \log_2 4 \Rightarrow \frac{x^2}{x-16} = 4 \Rightarrow \text{No tiene soluciones reales}$$

$$b) \log x = \log [10 \cdot (22-x)] \Rightarrow x = 10(22-x) \Rightarrow x=20$$

$$c) \log \left[\frac{(5x+4)^2}{4} \right] = \log (x+4) \Rightarrow \frac{(5x+4)^2}{4} = x+4 \Rightarrow x_1=0; x_2=-\frac{36}{25}$$

$$d) \log [2^{x^2-5x+9} \cdot 125] = \log 1000 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 8 \Rightarrow x_1=2; x_2=3$$

$$e) \ln [(2x-3) \cdot (5-x)] = \ln 5 \Rightarrow (2x-3)(5-x) = 5 \Rightarrow x_1=4; x_2=\frac{9}{4}$$

$$f) \ln x = \ln [2 \cdot (x-3)^2] \Rightarrow x = 2 \cdot (x-3)^2 \Rightarrow x_1=\frac{9}{2}; x_2=2$$

14. Los siguientes sistemas quedan:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2,62 ; y = 0,38 \\ x = 0,38 ; y = 2,62 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \log \left(\frac{x}{y} \right) = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log x = 2 ; x = 100 \\ \log y = 1 ; y = 10 \end{array}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \log 5 \\ \log x - \log y = \log 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log x = 2 \log 5 ; x = 25 \\ \log y = \log 5 ; y = 5 \end{array}$$

ACTIVIDADES FINALES

- 15. Responde a las siguientes cuestiones relacionadas con el interés simple:

- a) Un capital de 1 000 euros colocado al 12% de interés simple durante tres años, ¿en qué capital se transforma?
- b) ¿Cuánto tiempo hay que tener 3 000 euros al 10% de interés simple para que se conviertan en 3 900 euros?
- c) Calcula los intereses que generan 12 000 euros colocados al 7% de interés simple durante 4 años, si los intereses se devengan:

c1) Anualmente

c2) Mensualmente

- 16. Calcula el tiempo que debe estar colocado un capital de 4 000 euros en una cuenta corriente al 5,5% de interés compuesto anual para que el capital se duplique.

- 17. ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

- 18. ¿Qué capital será preciso que coloque un padre, al nacer su hijo, en el banco, si desea que cuando cumpla siete años pueda tener un capital de 2 100 euros? La imposición la hace al 8% de interés compuesto anual.

- 19. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 euros. La capitalización es mensual al 5% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

- 20. ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años doce mil euros?

- 21. Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 1 500 euros. Al comenzar el quinto año, sacamos 5 000 euros de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4,5% anual?

- 22. Se paga una deuda al 9% en 6 años mediante una anualidad de amortización de 1 350 euros. ¿A cuánto ascendía la deuda?

- 23. ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 50 000 euros a 15 años al 11% anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

- 24. Para amortizar una deuda de 29 500 euros, hemos abonado varias anualidades de 4 200 euros cada una al 7% anual. ¿Durante cuántos años?

- 55. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 6%. Cada anualidad de amortización asciende a 21 000 euros. ¿Cuánto costó el camión?

- 26. Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 10 000 euros. Ha de pagarla mediante cuotas trimestrales de 528,7 euros al 8% anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?



SOLUCIONES

15. En cada caso queda:

a) $i = \frac{1000 \cdot 12 \cdot 3}{100} = 360$ euros $\Rightarrow$ Se transforma en 1300 euros

b) $900 = \frac{3000 \cdot 10 \cdot t}{100} \Rightarrow t = 3$ años

c) $i = \frac{12000 \cdot 7 \cdot 4}{100} \Rightarrow i = 3360$ euros $\left. \begin{array}{l} \\ i = \frac{12000 \cdot 7 \cdot 48}{1200} \Rightarrow i = 3360 \text{ euros} \end{array} \right\} \Rightarrow$ En ambos casos generan unos intereses de 3360 euros.

16. Aplicando la fórmula: $M = C(1+r)^t$ obtenemos:

$$8000 = 4000 \cdot (1+0,055)^t \Rightarrow 2 = (1+0,055)^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,055} = 12,9 \text{ años}$$

17. En cada caso queda:

• $2C = C(1+r)^{20} \Rightarrow 2 = (1+r)^{20}$

Tomando logaritmos obtenemos: $\log(1+r) = \frac{\log 2}{20} \Rightarrow 1+r = 1,035 \Rightarrow r = 0,035$

Para que el capital se duplique al cabo de 20 años el rédito debe ser de un 3,5%.

• $2C = C(1+r)^{10} \Rightarrow \log(1+r) = \frac{\log 2}{10} \Rightarrow r = 0,072$

Para se duplique en 10 años se debe colocar a un rédito del 7,2%.

18. La solución queda:

$$2100 = C(1+0,08)^7 \Rightarrow C = 1225,33 \text{ euros.}$$

19. Queda:

$$C = \frac{60 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right) \cdot \left[\left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{48} - 1 \right]}{\frac{0,05}{12}} = 3194,1468 \text{ euros}$$

Al cabo de 4 años tendrá 3194,1468 euros.

20. Aplicando la fórmula:

$$C = \frac{a \cdot (1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r} \Rightarrow 12\,000 = \frac{a \cdot (1+0,13) \cdot [(1+0,13)^5 - 1]}{0,13} \Rightarrow a = 1\,638,7385 \text{ euros}$$

21. Aplicando la misma fórmula que en el problema anterior:

$$C = \frac{1500 \cdot (1+0,045) \cdot [(1+0,045)^4 - 1]}{0,045} = 6\,706,06 \text{ euros}$$

En la libreta después de sacar 5 000 euros quedan 1 706,06 euros.

22. Aplicando la fórmula: $a = \frac{D \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$ obtenemos:

$$1350 = \frac{D \cdot 0,09 \cdot (1+0,09)^6}{(1+0,09)^6 - 1} \Rightarrow D = 6\,055,99 \Rightarrow \text{La deuda asciende a 6 055,99 euros.}$$

23. Aplicando la misma fórmula del problema anterior:

$$a = \frac{50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{180} \cdot \frac{0,11}{12}}{\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{180} - 1} \Rightarrow a = 568,298 \text{ euros}$$

La cuota mensual de amortización es 568,298 euros.

En total hemos pagado:

$$C = \frac{568,298 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{180} \left[\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{180} - 1\right]}{\frac{0,11}{12}} = 260\,767,83 \text{ euros.}$$

24. Aplicando la fórmula: $A = \frac{D \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$ obtenemos:

$$4\,200 = \frac{29\,500 \cdot 0,07 \cdot 1,07^t}{1,07^t - 1} \Rightarrow 1,07^t = 1,9672 \Rightarrow t = 10 \text{ años.}$$

25. Aplicando la fórmula anterior obtenemos.

$$21\,000 = \frac{D \cdot 0,06 \cdot (1+0,06)^{13}}{(1+0,06)^{13} - 1} \Rightarrow D = 185\,906,34 \text{ euros costó el camión.}$$

26. Aplicando la fórmula anterior obtenemos:

$$528,7 = \frac{10\,000 \cdot \frac{0,08}{4} \cdot \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^t}{\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^t - 1} \Rightarrow 528,7 \cdot (1,02^t - 1) = 200 \cdot 1,02^t$$

$$\Rightarrow 1,02^t = 1,60845 \Rightarrow t = 24 \text{ períodos} \Rightarrow \text{Es decir, pagará la moto en 6 años.}$$