

EJEMPLOS. NÚMROS REALES. ÁLGEBRA

Ejercicio nº 1.-

Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\frac{48}{75}} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147}$

c) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\sqrt{\frac{48}{75}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2}{75}} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 5^2}} = \frac{4}{5} \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} - \sqrt{3 \cdot 7^2} = 6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

c) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{6})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{18}}{3} = \frac{6 + \sqrt{2 \cdot 3^2}}{3} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{3} = 2 + \sqrt{2}$

Ejercicio nº 2.-

Tres socios invierten 20, 40 y 60 miles de euros, respectivamente, en un negocio. Al cabo de un tiempo obtienen 18 000 euros de beneficio. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

Entre los tres socios invierten $20 + 40 + 60 = 120$ miles de euros.

Por cada mil euros invertidos corresponden $18\ 000 : 120\ 000 = 0,15$ euros de beneficio.

$0,15 \cdot 20 = 3$ € 3 000 euros le corresponden al primero.

$0,15 \cdot 40 = 6$ € 6 000 euros le corresponden al segundo.

$0,15 \cdot 60 = 9$ € 9 000 euros le corresponden al tercero.

Ejercicio nº 3.-

Factoriza el polinomio:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$$

Solución:

Sacamos factor común:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x^3 + x^2 - 9x - 9)$$

	1	1	-9	-9	
3		3	12	9	
	1	4	3	0	
-3		-3	-3		
	1	1	0		

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x-3)(x+3)(x+1)$$

Ejercicio nº 4.-

Efectúa estas operaciones y simplifica:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+x}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+x} - \frac{x^2}{x^2+x} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{x^2+2x+1-x^2-2x-2}{x^2+x} = \frac{-1}{x^2+x}$$

Ejercicio nº 5.-

Resuelve:

a) $(x-1)(x+1) = -1$

b) $\frac{x}{x+1} - \frac{16}{6} = \frac{x+1}{x}$

Solución:

a) $(x-1)(x+1) = -1$

$$x^2 - 1 = -1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

b) $\frac{x}{x+1} - \frac{16}{6} = \frac{x+1}{x}$

$$\frac{6x^2}{6x(x+1)} - \frac{16x(x+1)}{6x(x+1)} = \frac{6(x+1)^2}{6x(x+1)}$$

$$6x^2 - 16x^2 - 16x = 6(x^2 + 2x + 1)$$

$$6x^2 - 16x^2 - 16x = 6x^2 + 12x + 6$$

$$-16x^2 - 28x - 6 = 0$$

$$16x^2 + 28x + 6 = 0 \rightarrow 8x^2 + 14x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4} \\ x = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones $x_1 = \frac{-1}{4}$; $x_2 = \frac{-3}{2}$

Ejercicio nº 6.-

Resuelve los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 \\ 3(x-2) + y = 8 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \sqrt{3x} - 2y = 1 \\ \frac{x}{6} - \frac{2y-1}{2} = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 \\ 3(x-2) + y = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{5x}{15} + \frac{3y}{15} = \frac{30}{15} \\ 3x-6+y=8 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+3y=30 \\ 3x+y=14 \end{array} \right\}$$

Despejamos de la segunda ecuación:

$$y = 14 - 3x$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$5x + 3(14 - 3x) = 30 \rightarrow 5x + 42 - 9x = 30 \rightarrow -4x = -12 \rightarrow x = 3$$

$$y = 14 - 3x = 14 - 9 = 5$$

La solución es: $x = 3$; $y = 5$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{3x} - 2y = 1 \\ x - 3(2y-1) = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{3x} - 2y = 1 \\ x - 6y + 3 = 6 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{3x} - 2y = 1 \\ x - 6y = 3 \end{array} \right\}$$

Despejamos x en la 2.ª ecuación: $x = 3 + 6y$

Sustituimos en la primera:

$$\sqrt{3(3+6y)} - 2y = 1 \rightarrow \sqrt{9+18y} - 2y = 1 \rightarrow \sqrt{9+18y} = 1+2y \rightarrow$$

$$(\sqrt{9+18y})^2 = (1+2y)^2 \rightarrow 9+18y = 1+4y+4y^2 \rightarrow 4y^2 - 14y - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación $x = 3 + 6y$:

- Si $y = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 3 - \frac{6}{2} = 3 - 3 = 0$

- Si $y = 4 \rightarrow x = 3 + 24 = 27$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la primera ecuación, $\sqrt{3x} - 2y = 1$:

• $x = 0, y = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{0} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ Válida.

• $x = 27, y = 4 \rightarrow \sqrt{81} - 8 = 9 - 8 = 1$ Válida.

Las soluciones son:

$x_1 = 0, y_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 27, y_2 = 4$

Ejercicio nº 7.-

Hemos comprado un pantalón y una camiseta por 44,1 euros. El pantalón tenía un 15% de descuento y la camiseta estaba rebajada un 10%. Si no tuvieran ningún descuento, habríamos tenido que pagar 51 euros. ¿Cuánto nos ha costado el pantalón y cuánto la camiseta?

Solución:

Llamamos x al precio del pantalón sin el descuento e y al precio de la camiseta sin descuento. Así:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 51 \\ 0,85x + 0,9y = 44,1 \end{array} \right\} \rightarrow y = 51 - x$$

$0,85x + 0,9y = 44,1 \rightarrow 0,85x + 0,9(51 - x) = 44,1 \rightarrow 0,85x - 0,9x = 44,1 - 45,9 \rightarrow$

$\rightarrow -0,05x = -1,8 \rightarrow x = 36$

$y = 51 - x = 51 - 36 = 15$

El pantalón costaba 36 euros y la camiseta 15 euros, sin los descuentos.

Por tanto, el precio del pantalón (con descuento) ha sido de:

$36 \cdot 0,85 = 30,6$ euros

y el de la camiseta (con descuento) ha sido de:

$15 \cdot 0,9 = 13,5$ euros

Ejercicio n° 8.-

Resuelve e interpreta gráficamente la siguiente inecuación:

$$x^2 - 4 \leq 0$$

Solución:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

La parábola $y = x^2 - 4$ corta al eje x en $x = -2$ y en $x = 2$.

En el intervalo $[-2, 2]$ toma valores negativos o nulos. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$: