

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + 5 = 0 \implies$ No hay puntos de corte con OX .
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -5/2 \implies (0, -5/2)$.

c)

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.

e) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5}{x - 2} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5}{x - 2} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x - 2} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x - 2} - x \right) = 2$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 2$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2} = 0 \implies x = -1, x = 5$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 2) \cup (2, 5)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(5, 10)$.

g)

$$f''(x) = \frac{18}{(x - 2)^3} \neq 0$$

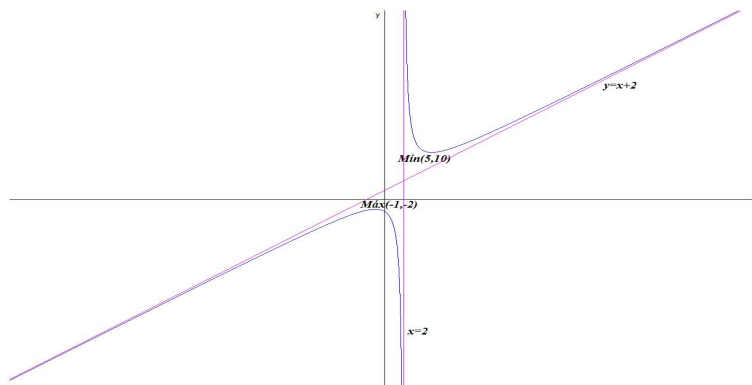
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava: $(2, +\infty)$

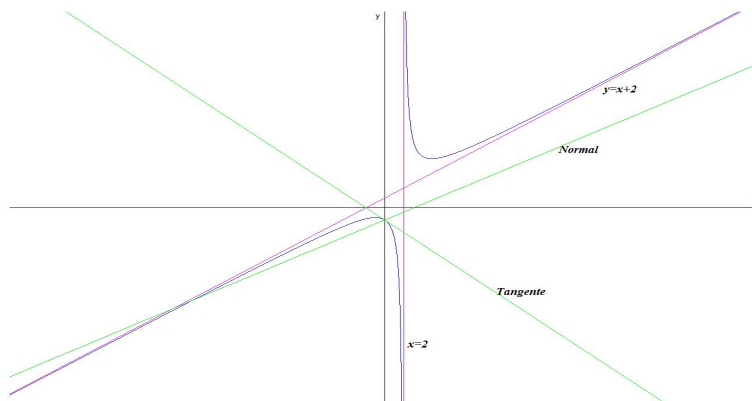
Convexa: $(-\infty, 2)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(0) = -5/4$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}x$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{5}{2} = \frac{4}{5}x$$

Como $f(0) = -5/2$ las rectas pasan por el punto $(0, -5/2)$.