

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Representación gráfica.
- h) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 3x + 3 = 0 \implies$
No hay.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1 \implies (0, -1)$.
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

- d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ No hay simetría.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x \right) = -2$$

$$y = x - 2$$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = 0, \quad x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

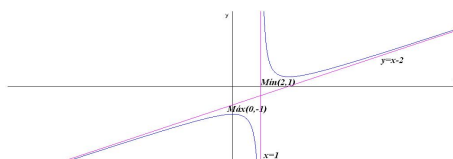
La función es creciente en: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

La función es decreciente en: $(0, 1) \cup (1, 2)$

La función tiene un máximo en: $(0, -1)$

La función tiene un mínimo en: $(2, 1)$

g) Representación:



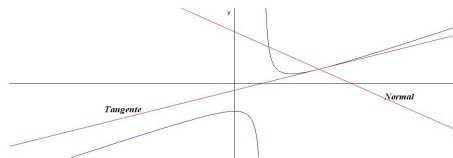
- h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:

Como $f(3) = 3/2$ las rectas pasan por el punto $(3, 3/2)$.

Como $m = f'(3) = 3/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}(x - 3)$$



Problema 2 Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2 - 2} - \sqrt{3x^2 - 2x + 1})$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$
c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 8}}{x - 5}$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2 - 2} - \sqrt{3x^2 - 2x + 1}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \frac{8}{5}$
c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 8}}{x - 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Problema 3 Calcular las siguientes derivadas:

- a) $y = (4x^3 - 2)^{15}$
b) $y = \ln 5x^3 - 4x^2 + x - 1$
c) $y = e^{x^2+x-1}$

Solución:

a) $y = (4x^3 - 2)^{15} \implies y' = 15(4x^3 - 2)^{14}(12x^2)$

b) $y = \ln 5x^3 - 4x^2 + x - 1 \implies y' = \frac{15x^2 - 8x + 1}{5x^3 - 4x^2 + x - 1}$

c) $y = e^{x^2+x-1} \implies y' = (2x + 1)e^{x^2+x-1}$