

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies (3, 0)$ y $(-3, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 9/4 \implies (0, 9/4)$.
- c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+

- d) $f(-x) = f(x) \implies$ la función es par.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \left[\frac{-5}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \left[\frac{-5}{0^+} \right] = -\infty$$

$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \left[\frac{-5}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = \left[\frac{-5}{0^-} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

$$f'(x) = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

La función es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en $(0, 9/4)$.

g)

$$f''(x) = -\frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \neq 0$$

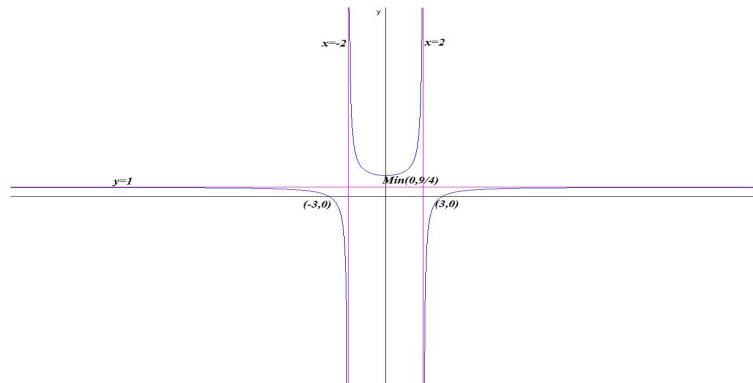
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Convexa: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

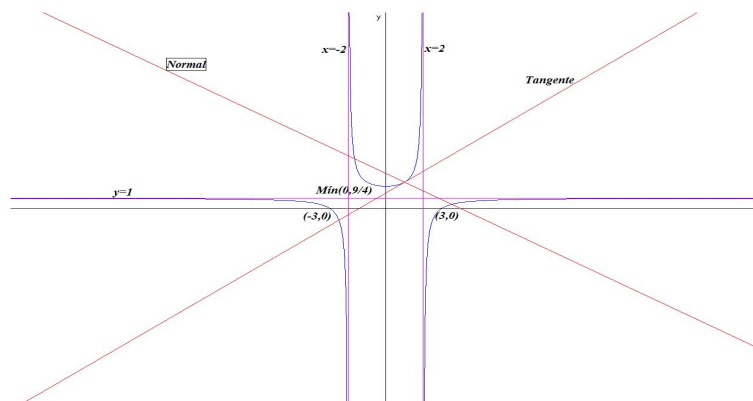
Cóncava: $(-2, 2)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $m = f'(1) = 10/9$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{8}{3} = \frac{10}{9}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{8}{3} = -\frac{9}{10}(x - 1)$$

Como $f(1) = \frac{8}{3}$ las rectas pasan por el punto $(1, 8/3)$.