

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{5x - 15}{(x - 1)^2}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 5x - 15 = 0 \implies (3, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -15 \implies (0, -15)$.
- c)

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	$-$	$+$

- d) $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 15}{(x - 1)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x - 15}{(x - 1)^2} = \left[\frac{-10}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 15}{(x - 1)^2} = \left[\frac{-10}{0^+} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 15}{(x - 1)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

$$f'(x) = \frac{-5x + 25}{(x - 1)^3} = 0 \implies x = 5$$

	$(-\infty, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 5)$.

La función es decreciente en el intervalo $(5, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(5, 5/8)$.

g)

$$f''(x) = -\frac{10x - 70}{(x - 1)^4} = 0 \implies x = 7$$

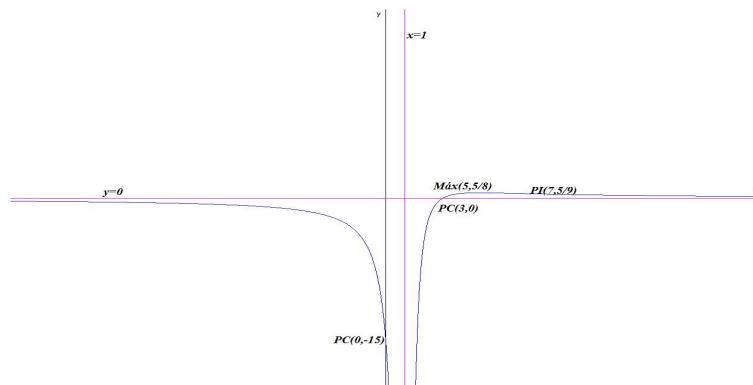
	$(-\infty, 7)$	$(7, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 1) \cup (1, 7)$

Cóncava: $(1, \infty)$

Punto de Inflexión en $(7, 5/9)$

h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = 15$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 5 = 15(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 5 = -\frac{1}{15}(x - 2)$$

Como $f(2) = -5$ las rectas pasan por el punto $(2, -5)$.

