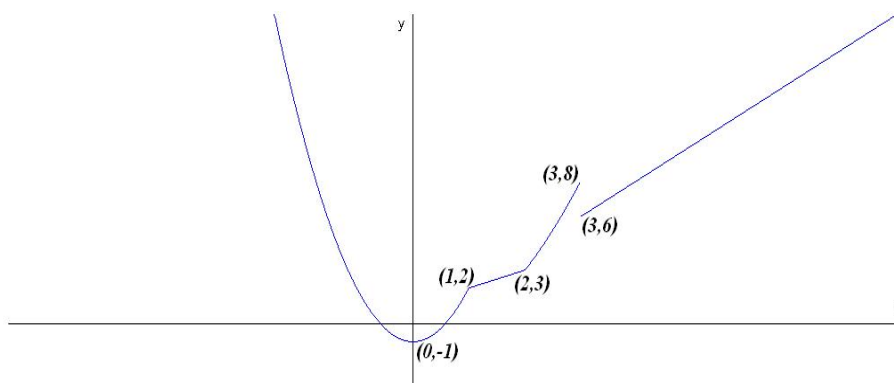


Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 3$. Representarla gráficamente

Solución:



En $x = 1$ es continua, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable (agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - 3ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 3bx + 1) = a + 3b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 - 3ax + 2) = b - 3a + 2$$

$$a + 3b + 1 = b - 3a + 2 \implies 4a + 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - 3a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a + 3b; \quad f'(1^+) = 2b - 3a \implies 2a + 3b = 2b - 3a \implies 5a + b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 5/6 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \implies y = x - 5$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x+1} - x \right) = -5$$

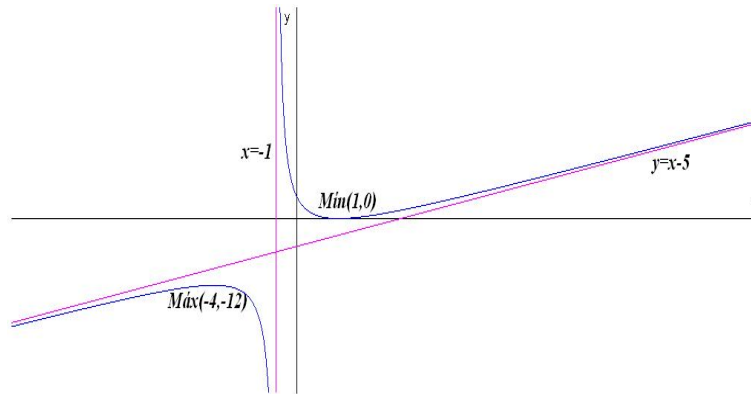
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \implies x = 2, \quad x = -4$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-4, -1) \cup (-1, 4)$

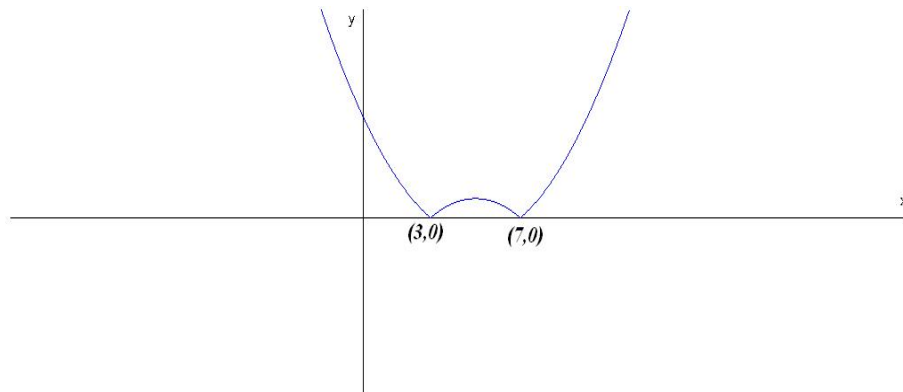
La función tiene un máximo en el punto $(-4, -12)$ y un mínimo en el punto $(2, 0)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = |x^2 - 10x + 21|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 10x + 21 \Rightarrow g'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$:



x	y
0	21
3	0
7	0
5	-4

$g''(x) = 2 \implies g''(5) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $(5, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(5, 4)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + 21 & \text{si } x \leq 3 \\ -(x^2 - 10x + 21) & \text{si } 3 < x \leq 7 \\ x^2 - 10x + 21 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 10x + 21) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 10x - 21) = 0 \\ f(3) &= 0 \end{aligned}$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^-} (-x^2 + 10x - 21) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^+} (x^2 - 10x + 21) = 0 \\ f(7) &= 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 10 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x + 10 & \text{si } 3 < x \leq 7 \\ 2x - 10 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -4$ y $f'(3^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -4$ y $f'(7^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{3, 7\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = 3ax^2 - bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 3)$.

Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - bx + c, \quad f'(x) = 6ax - b$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \implies c = 1 \\ f(2) = 3 \implies 12a - 2b + c = 3 \\ f'(2) = 0 \implies 12a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/6 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \implies f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - 2x - 1$$