

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 2x^2 - 8 = 0 \implies (2, 0), (-2, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 8 \implies (0, 8)$.

c)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+

d) $f(-x) = f(x) \implies \text{PAR}$.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$ ya que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^+} \right] = -\infty$$

$$x = -1 \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^-} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 2$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = 2$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \frac{12x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0:$

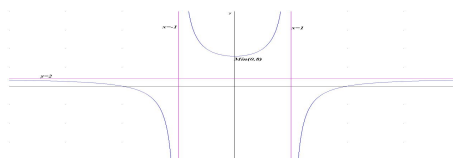
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es creciente en los intervalos $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, presenta un mínimo en el punto $(0, 8)$

g) $f'(x) = \frac{12(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3} \neq 0 \implies$ No hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$:

Como $f(3) = 5/4$ las rectas pasan por el punto $(3, 5/4)$.

Como $m = f'(3) = \frac{9}{16}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{5}{4} = \frac{9}{16}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{5}{4} = -\frac{16}{9}(x - 3)$$

