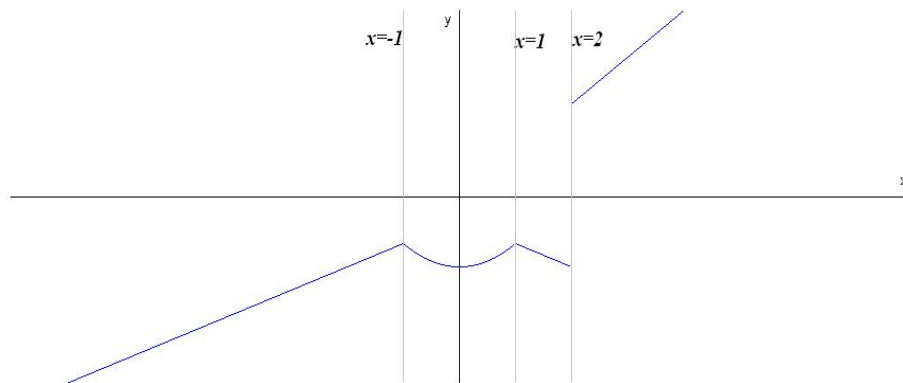


Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \\ -x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

Solución:



En $x = -1$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable (agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 2 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - ax + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 - bx + 2) = 3a - b + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 4) = b - a + 4$$

$$3a - b + 2 = b - a + 4 \implies 2a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - b; \quad f'(1^+) = 2b - a \implies 6a - b = 2b - a \implies 7a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 7a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = -7 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-3b}{2} & \text{si } x < -1 \\ 2bx - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax-2b}{3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax-3b}{2} = \frac{-a-3b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2bx - 1) = -2b - 1 \end{cases} \implies \frac{-a-3b}{2} = -2b-1 \implies a-b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2bx - 1) = 2b - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax-2b}{3} = \frac{a-2b}{3} \end{cases} \implies 2b-1 = \frac{a-2b}{3} \implies a-8b = -3$$

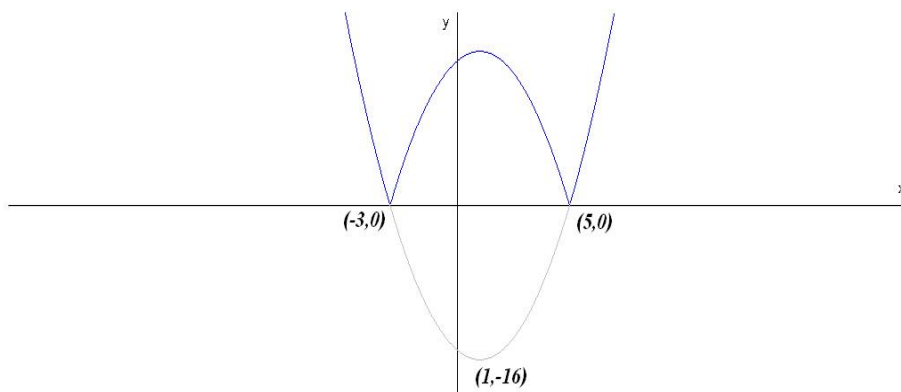
$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a - 8b = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 19/7 \\ b = 5/7 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ y representarla gráficamente.

Solución:

$$\text{Hacemos } g(x) = x^2 - 2x - 15 \implies g'(x) = 2x - 2 = 0 \implies x = 1:$$

x	y
0	-15
-3	0
5	0
1	-16



$g''(x) = 2 \implies g''(1) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $(1, -16)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(1, -16)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 15 & \text{si } x \leq -3 \\ -(x^2 - 2x - 15) & \text{si } -3 < x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 15 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x + 15) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 2x + 15) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq -3 \\ -2x + 2 & \text{si } -3 < x \leq 5 \\ 2x - 2 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -8$ y $f'(-3^+) = 8$, luego no es derivable en $x = -3$.

Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -8$ y $f'(5^+) = 8$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-3, 5\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = 3ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 4)$.

Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - 2bx + c, \quad f'(x) = 6ax - 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 3 \implies c = 3 \\ f(2) = 4 \implies 12a - 4b + c = 4 \\ f'(2) = 0 \implies 12a - 2b = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} a = -1/12 \\ b = -1/2 \\ c = 3 \end{array} \right. \implies f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$