

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 9x^2 - 1 = 0 \implies (1/3, 0) \quad (-1/3, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1/2 \implies (0, 1)$.
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -1/3)$	$(-1/3, 1/3)$	$(1/3, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	+	-	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$ la función es PAR.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 9$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 1}{x^2 - 1} = 9$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{16x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 1)$.

g)

$$f''(x) = \frac{48x^2 + 16}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

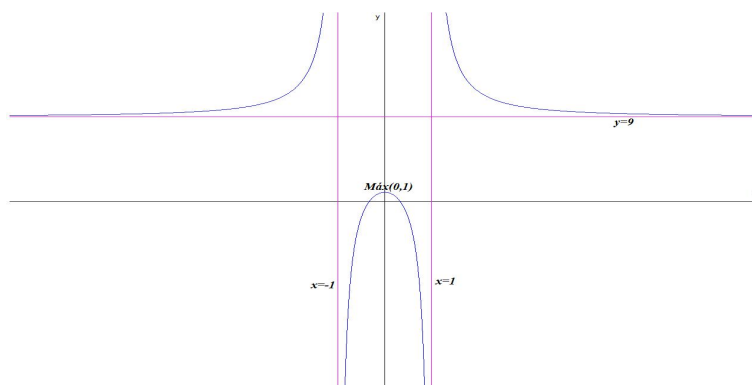
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

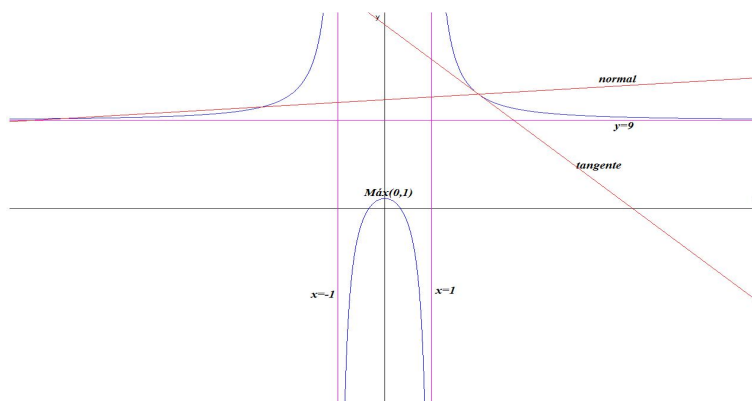
Convexa: $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = -32/9$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{35}{3} = -\frac{32}{9}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{35}{3} = \frac{9}{32}(x - 2)$$

Como $f(2) = 35/3$ las rectas pasan por el punto $(2, 35/3)$.