

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 7x = 0 \implies (0, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
- c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	—	+

- d) $f(-x) = -f(x) \implies \text{IMPAR}$.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x^2 + 1} = 0$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \frac{-7x^2 + 7}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = \pm 1:$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en los intervalos $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, presenta un mínimo en el punto $(-1, -7/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

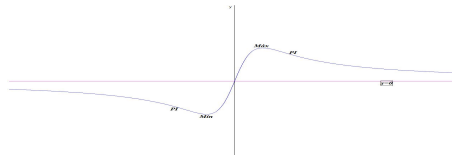
g) $f''(x) = \frac{14x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{3}.$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

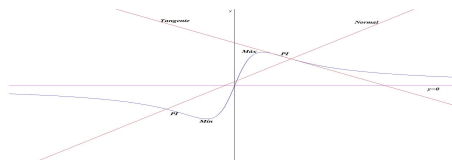
La función es convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Tiene los puntos de Inflexión: $(-\sqrt{3}, -\frac{7\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{7\sqrt{3}}{4})$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:



Como $f(2) = 14/5$ las rectas pasan por el punto $(2, 14/5)$.

Como $m = f'(2) = -\frac{21}{25}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{14}{5} = -\frac{21}{25}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{14}{5} = \frac{25}{21}(x - 2)$$