

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Representación gráfica.
- h) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies (3, 0) \ (-3, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies$ no hay puntos de corte.
- c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	+	-	+

- d) $f(-x) = f(x) \implies f$ es par.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \left[\frac{-9}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \left[\frac{-9}{0^+} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

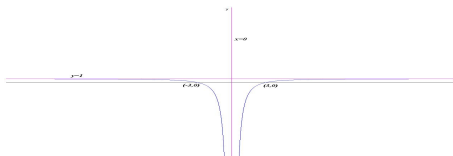
$$f'(x) = \frac{18}{x^3} \neq 0 \implies \text{no hay extremos}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

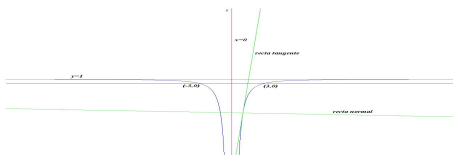
La función es creciente en: $(0, +\infty)$

La función es decreciente en: $(-\infty, 0)$

g) Representación:



h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:



Como $f(1) = -8$ las rectas pasan por el punto $(0, -45/2)$.

Como $m = f'(1) = 18$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 8 = 18(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 8 = -\frac{1}{18}(x - 1)$$