

Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 2}$$

$$2. f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 3}}$$

Solución:

$$1. f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 2} \implies \text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [2, \infty)$$

$$2. f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 3}} \implies \text{Dom } f = (-3, \infty)$$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, calcular:
 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 2}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x + 2}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x + 2)^2} + 1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x + 2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x + 2} + 2} = \frac{x + 2}{2x + 5}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 + 1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{x + 1}{2x + 3}$, calcular la función inversa.

Solución:

$$y = \frac{x + 1}{2x + 3} \implies 2yx + 3y = x + 1 \implies 2yx - x = 1 - 3y \implies$$

$$(2y - 1)x = 1 - 3y \implies x = \frac{1 - 3y}{2y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1 - 3x}{2x - 1}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$$

Solución:

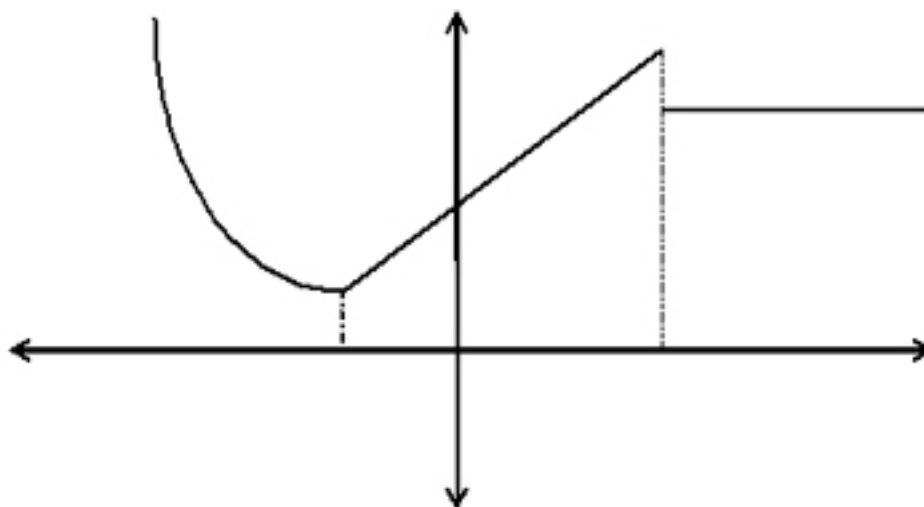
$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} = -\frac{2}{3}$$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies (0, -4)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (2, 0)$ y $(-2, 0)$
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x) + 1} = \frac{x^2 - 4}{-x + 1}$$

La función ni es par ni impar.

4.
 - **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = \infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \infty \implies \text{No Hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = -1$$

$$y = x - 1$$

