

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1.- Resuelve en las ecuaciones exponenciales y comprueba los resultados:

- | | |
|---|---|
| <p>1) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$</p> <p>2) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$</p> <p>3) $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$</p> <p>4) $5^x - 97 \cdot 5^{x/2} + 6^4 = 0$</p> <p>5) $10^{3-x} = 1$</p> <p>6) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$</p> | <p>7) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$</p> <p>8) $3^x + 3^{1-x} = 4$</p> <p>9) $4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$</p> <p>10) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$</p> <p>11) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$</p> |
|---|---|

2.- Resuelve en los sistemas:

- | | |
|--|---|
| <p>1) $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$</p> <p>2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ 2 \lg x - 2 \lg y = -1 \end{cases}$</p> <p>3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 56 - \lg 20 \\ \lg x + \lg y = 1 + \lg 20 \end{cases}$</p> <p>4) $\begin{cases} \lg_y(9-x) = 1/2 \\ \lg_x(y+9) = 2 \end{cases}$</p> | <p>5) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$</p> <p>6) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$</p> <p>7) $\begin{cases} \lg_x(y-18) = 2 \\ \lg_y(x+3) = 1/2 \end{cases}$</p> <p>8) $\begin{cases} \lg_2(3^y - 1) = x \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$</p> |
|--|---|

3.- Resuelve en las ecuaciones logarítmicas:

- | | |
|---|--|
| <p>1) $(x^2 - 5x + 9) \lg 2 + \lg 125 = 3$</p> <p>2) $\lg(2^{2-x})^{2+x} + \lg 1250 = 4$</p> <p>3) $\frac{\lg 2 + \lg(11-x^2)}{\lg(5-x)} = 2$</p> <p>4) $(x^2 - 4x + 7) \lg 5 + \lg 16 = 4$</p> <p>5) $\lg(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \lg(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 ; x \geq 1$</p> | <p>6) $3 \lg x - \lg 32 = \lg(x/2)$</p> <p>7) $\lg_2 x \cdot \lg_x 2x \cdot \lg_{2x} y = \lg_x x^2$</p> <p>8) $5 \lg \frac{x}{2} + 2 \lg \frac{x}{3} = 3 \lg x - \lg \frac{32}{9}$</p> <p>9) $2 \lg x = 3 + \lg(x/10)$</p> <p>10) $\lg \sqrt{3x+1} - \lg \sqrt{2x-3} = 1 - \lg 5$</p> |
|---|--|

ECUACIONES EXPONENCIALES

1.-.Resuelve las ecuaciones exponenciales y comprueba los resultados:

- | | <u>Soluciones</u> | | <u>Soluciones</u> |
|--|---------------------------------------|--|------------------------|
| 1) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$ | $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 1/5$ | 7) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$ *** | $x = 10$ |
| 2) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$ | $x = 3$ | 8) $3^x + 3^{1-x} = 4$ ** | $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ |
| 3) $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ ** | $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ | 9) $4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$ | |
| 4) $5^x - 97 \cdot 5^{x/2} + 6^4 = 0$ ** | $x_1 = 8 \lg_5 2$, $x_2 = 8 \lg_5 3$ | 10) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ * | $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ |
| 5) $10^{3-x} = 1$ * | $x = 0$ | 11) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ *** | $x = 1$ |
| 6) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$ | $x = 5$ | | |

Resolución:

$$1) 5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}} \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 25^{\frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}} \Leftrightarrow 5^{2x-1} = \left(5^2\right)^{\frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}} \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^{2 \cdot \frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}} \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \cdot \frac{x^2-\frac{1}{4}}{3} \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot (2x-1) = 2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 6x-3 = 2 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 12x-6 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ó } x = \frac{5}{2}$$

Existen dos soluciones, $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 5/2$

**De forma análoga se resuelven los ejercicios 5) y 11).*

$$\begin{aligned} 2) \quad 4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 &= 0 \Leftrightarrow (2^2)^{x+1} + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x+2} + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0 \\ 2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 &= 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 320 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 &= 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 4t^2 + 8t - 320 &= 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 80 = 0 \\ \left. \begin{aligned} \text{Realizamos el cambio } 2^x &= t, \text{ con lo que } 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2 \end{aligned} \right\} &\begin{cases} t_1 = 8 = 2^x \\ t_2 = -10 = 2^x \end{cases} \end{aligned}$$

Existe una única solución real: $x = 3$

***De forma análoga se resuelven los ejercicios 3), 4) y 8).*

$$\begin{aligned} 6) \quad 2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} &= 1984 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} + 2^{2x} \cdot 2^{-2} + 2^{2x} \cdot 2^{-3} + 2^{2x} \cdot 2^{-4} = 1984 \Leftrightarrow \\ 2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} + \frac{2^{2x}}{2^2} + \frac{2^{2x}}{2^3} + \frac{2^{2x}}{2^4} &= 1984 \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} + \frac{2^{2x}}{4} + \frac{2^{2x}}{8} + \frac{2^{2x}}{16} = 1984 \\ t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \frac{t}{16} &= 1984 \Leftrightarrow 16t + 8t + 4t + 2t + t = 1984 \cdot 16 \Leftrightarrow 31t = 1984 \cdot 16 \Leftrightarrow t = 64 \cdot 16 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} \\ \text{Realizamos el cambio } 2^{2x} &= t \\ t = 2^{2x} = 2^{10} &\Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

****De forma análoga se resuelven los ejercicios 7) y 11).*

$$9) \quad 4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{e^{3x}} - \frac{5}{e^x} + e^x = 0$$

Realizamos el cambio $e^x = t$, con lo que $t e^{3x} = t^3$, y resolvemos la ecuación:

$$\frac{4}{t^3} - \frac{5}{t} + t = 0 \Leftrightarrow 4 - 5t^2 + t^3 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 4t - 4) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $t_1 = 1$, $t_2 = 2 + 2\sqrt{2}$, $t_3 = 2 - 2\sqrt{2}$

De donde obtenemos dos soluciones reales de la ecuación dada:

$$t_1 = 1 = e^x \Rightarrow x_1 = 0; \quad t_2 = 2 + 2\sqrt{2} = e^x \Rightarrow x_2 = \ln(2 + 2\sqrt{2}); \quad t_3 = 2 - 2\sqrt{2} = 2^x \text{ no tiene solución real.}$$

SISTEMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS

2.- Resuelve en los sistemas:

	<u>Soluciones</u>		<u>Soluciones</u>
1) $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$	$x=3, y=2$	5) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$	$x=10+10^{1/2}, y=-10+10^{1/2}$
2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ 2 \lg x - 2 \lg y = -1 \end{cases}$	$x=10^{5/4}, y=10^{7/4}$	6) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$	$x=20, y=2$
3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 56 - \lg 20 \\ \lg x + \lg y = 1 + \lg 20 \end{cases}$	$x=4 \cdot 35^{1/2}, y=(10/7) \cdot 35^{1/2}$	7) $\begin{cases} \lg_x(y-18) = 2 \\ \lg_y(x+3) = 1/2 \end{cases}$	$x=3/2, y=81/4$
4) $\begin{cases} \lg_y(9-x) = 1/2 \\ \lg_x(y+9) = 2 \end{cases}$	$x=5, y=16$	8) $\begin{cases} \lg_2(3^y - 1) = x \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$	$x=3, y=2$

Resolución:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6 \cdot 6^y = 807 \\ \frac{15}{5} \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3t + 12s = 807 \\ 3t - s = 339 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} s = 36 \\ t = 125 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} t = 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3 \\ s = 6^y = 36 = 6^2 \Rightarrow y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^x = t \\ 6^y = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 5^x = t \\ 6^y = s \end{array} \right\}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 3 \\ 2 \lg x - 2 \lg y = -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 3 \\ 2 \lg x - 2 \lg y = -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} t + s = 3 \\ 2t - 2s = -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} t = 5/4 \\ s = 7/4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} t = \lg x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{10^5} \\ s = \lg y = \frac{7}{4} \Rightarrow y = 10^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{10^7} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lg x = t \\ \lg y = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lg x = t \\ \lg y = s \end{array} \right\}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \lg x - \lg y = \lg 56 - \lg 20 \\ \lg x + \lg y = 1 + \lg 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lg(x/y) = \lg(56/20) \\ \lg(xy) = \lg 200 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x/y = 56/20 \\ xy = 200 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4\sqrt{35} \quad ; x_2 = -4\sqrt{35} \\ y_1 = 10\sqrt{35}/7 \quad ; y_2 = -10\sqrt{35}/7 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}$$

$$4) \left\{ \begin{array}{l} \lg_y(9-x) = 1/2 \\ \lg_x(y+9) = 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 9-x = y^{1/2} \\ y+9 = x^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 9-x = \sqrt{y} \\ y+9 = x^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = (9-x)^2 \\ y = x^2 - 9 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 9 \\ (9-x)^2 = x^2 - 9 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = 16 \\ x = 5 \end{array} \right\}$$

$$5) \left\{ \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 2 \\ x - y = 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lg(x \cdot y) = \lg 100 \\ x - y = 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x \cdot y = 100 \\ x - y = 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -10 + 10\sqrt{2} \quad y_1 = -10 - 10\sqrt{2} \\ x_1 = 10 + 10\sqrt{2} \quad x_2 = 10 - 10\sqrt{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 10 + 10\sqrt{2} \\ y = -10 + 10\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0; y > 0 \end{array} \right\}$$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} \lg x - \lg y = 1 \\ x + y = 22 \end{array} \right\} \text{ Se resuelve de forma similar al 5).}$$

$$7) \left\{ \begin{array}{l} \lg_x(y-18) = 2 \\ \lg_y(x+3) = 1/2 \end{array} \right\} \text{ Se resuelve de forma similar al 4).}$$

$$8) \left\{ \begin{array}{l} \lg_2(3^y - 1) = x \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3^y - 1 = 2^x \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{array} \right\} \text{ A partir de aquí se resuelve de forma similar al 1).}$$

$$t = 2^x; s = 3^y$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

3.- Resuelve las ecuaciones logarítmicas:

$$1) (x^2 - 5x + 9) \lg 2 + \lg 125 = 3$$

$$2) \lg(2^{2-x})^{2+x} + \lg 1250 = 4$$

$$3) \frac{\lg 2 + \lg(11 - x^2)}{\lg(5 - x)} = 2$$

$$4) (x^2 - 4x + 7) \lg 5 + \lg 16 = 4$$

$$5) \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \lg(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0; x \geq 1$$

$$6) 3 \lg x - \lg 32 = \lg(x/2)$$

$$7) \lg_2 x \cdot \lg_x 2x \cdot \lg_{2x} y = \lg_x x^2$$

$$8) 5 \lg \frac{x}{2} + 2 \lg \frac{x}{3} = 3 \lg x - \lg \frac{32}{9}$$

$$9) 2 \lg x = 3 + \lg(x/10)$$

$$10) \lg \sqrt{3x+1} - \lg \sqrt{2x-3} = 1 - \lg 5$$

Resolución:

$$1) (x^2 - 5x + 9) \lg 2 + \lg 125 = 3 \Rightarrow \lg 2^{x^2 - 5x + 9} + \lg 125 = \lg 1000 \Rightarrow \lg(2^{x^2 - 5x + 9} \cdot 125) = \lg 1000 \Rightarrow 2^{x^2 - 5x + 9} \cdot 125 = 1000 \Rightarrow$$

$$2^{x^2 - 5x + 9} = 8 \Rightarrow 2^{x^2 - 5x + 9} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$2) \lg(2^{2-x})^{2+x} + \lg 1250 = 4 \Rightarrow \lg[(2^{2-x})^{2+x} \cdot 1250] = \lg 10^4 \Rightarrow (2^{2-x})^{2+x} \cdot 1250 = 10^4 \Rightarrow (2^{2-x})^{2+x} = 8 \Rightarrow 2^{4-x^2} = 2^3 \Rightarrow 4-x^2=3 \Rightarrow x_1=1, x_2=-1$$

$$3) \frac{\lg 2 + \lg(11-x^2)}{\lg(5-x)} = 2 \Rightarrow \lg 2 + \lg(11-x^2) = 2 \cdot \lg(5-x) \Rightarrow \lg[2 \cdot (11-x^2)] = \lg(5-x)^2 \Rightarrow 2 \cdot (11-x^2) = (5-x)^2 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

Al resolver la ecuación de segundo grado resultante da dos soluciones, $x_1=3$, $x_2=1/3$, que son también soluciones de la ecuación logarítmica dada.

$$4) (x^2-4x+7)\lg 5 + \lg 16 = 4 \Rightarrow \lg 5^{x^2-4x+7} + \lg 16 = \lg 10^4 \Rightarrow \dots\dots\dots x_1=1, x_2=3$$

Se resuelve de forma similar al 1).

$$5) \lg(x + \sqrt{x^2-1}) + \lg(x - \sqrt{x^2-1}) = 0; x \geq 1 \Rightarrow \lg \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lg 1; x \geq 1 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = 1; x \geq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-1}; x \geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-1} = 0; x \geq 1 \Rightarrow x^2-1=0; x \geq 1 \Rightarrow x=1$$

$$6) 3\lg x - \lg 32 = \lg(x/2) \Rightarrow \lg \frac{x^3}{32} = \lg \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{32} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^3 = 16x \Rightarrow x_1=0, x_2=-4, x_3=4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

$$7) \lg_2 x \cdot \lg_x 2x \cdot \lg_{2x} y = \lg_x x^2 \Rightarrow \cancel{\lg_2 x} \cdot \frac{\lg_2 2x}{\cancel{\lg_2 x}} \cdot \frac{\lg_2 y}{\lg_2 2x} = \frac{\lg_2 x^2}{\lg_2 x} \Rightarrow \lg_2 y = \frac{2\cancel{\lg_2 x}}{\cancel{\lg_2 x}} \Rightarrow \lg_2 y = 2 \Rightarrow y=4, \forall x>0$$

$$8) 5\lg \frac{x}{2} + 2\lg \frac{x}{3} = 3\lg x - \lg \frac{39}{9} \Rightarrow \lg \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \lg \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \lg \left(\frac{x^3}{32/9}\right) \Rightarrow \lg \left(\frac{x^5}{2^5} \cdot \frac{x^2}{3^2}\right) = \lg \frac{9x^3}{32} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^7}{2^5 \cdot 3^2} = \frac{9x^3}{32} \Rightarrow x^7 = 81x^3 \\ x > 0 \end{cases}$$

La ecuación $x^7=81x^3$ tiene tres soluciones reales, $x=0$, $x=-3$, $x=3$. De ellas, sólo $x=3$, es solución de la ecuación logarítmica dada.

$$9) 2\lg x = 3 + \lg(x/10) \Rightarrow \lg x^2 = \lg 1000 + \lg(x/10) \Rightarrow \lg x^2 = \lg(1000x/10) \Rightarrow \lg x^2 = \lg 100x \Rightarrow x^2 = 100x, x>0 \Rightarrow x=10$$

$$10) \lg \sqrt{3x+1} - \lg \sqrt{2x-3} = 1 - \lg 5 \Rightarrow \lg \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}} = \lg \frac{10}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}} = 2 \Rightarrow \frac{3x+1}{2x-3} = 4 \Rightarrow \dots\dots\dots x=11/5$$