

OPCIÓN A

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina m sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_1^1 f(x)dx$

2.- Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = c e^{-(x+1)}$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a , b y c .

b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + z = 8 \\ \lambda x + y + \lambda z = 10 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

4.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, es paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z .

OPCIÓN B

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$

- a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f .
- b) Calcula $\int_0^4 f(x) dx$

2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- a) Estudia su continuidad y derivabilidad.
- b) Determina sus asíntotas.
- c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su mínimo relativo.

3.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Halla el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.
- b) Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 2$.

4.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z-2$

- a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $A(1,2,3)$.
- b) Determina las coordenadas del punto B , simétrico de A respecto de la recta r .

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina m sabiendo que f es derivable. Cada trozo es continuo y derivable (el primer trozo no lo sería en 1, pero no está en ese intervalo). Veamos qué pasa en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 - 0 - 0 = 1 \\ \text{Continuidad: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - mx - x^2) = 1 \end{array} \right\} \text{Continua en } x=0$$

Derivabilidad:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1-h)}{h(1-h)} = 1 \\ f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - mh - h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-m - h}{h} = -m \end{array} \right\} m = -1$$

Para que sea derivable tiene que ser $m = -1$

b) Calcula

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 (1+x-x^2) dx = -\ln|1-x| \Big|_{-1}^0 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= -\ln 1 + \ln 2 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \ln 2 + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

2.- Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = c e^{-(x+1)}$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a , b y c . $f'(x) = 2x + a$; $g'(x) = -c e^{-(x+1)}$

Sabemos que: $f(-1) = 2$ y $g(-1) = 2$ y también que $f'(-1) = g'(-1)$. Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a + b = 2 \\ c e^0 = 2 \\ -2 + a = -c e^0 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow -2 + a = -2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 1 - 0 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

b) Halla la ecuación de dicha recta tangente: $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$

$y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x$ es la recta tangente pedida.

3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + z = 8 \\ \lambda x + y + \lambda z = 10 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ .

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix}$ estudiamos el rango de ambas matrices:

$r(A) < 3$ para cualquier valor de λ , ya que las columnas 1ª y 3ª son iguales, nos

queda: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$

Para $\lambda \neq -1 \rightarrow r(A) = 2$, veamos el rango de A^* , por lo menos 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 8 \\ 1 & \lambda & 10 \end{vmatrix} = -10 + 8 + 2\lambda^2 - 2 + 8\lambda - 10\lambda = 0$

$2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

Discusión del sistema:

- Para $\lambda = -1 \rightarrow r(A) = 1, r(A^*) = 2$, INCOMPATIBLE
- Para $\lambda = 2 \rightarrow r(A) = 2, r(A^*) = 2$, COMPATIBLE INDETERMINADO
- Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow r(A) = 2, r(A^*) = 3$ INCOMPATIBLE

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}$ Sistema Compatible Indeterminado, con $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, z = t$

$\begin{cases} x - y = 2 - t \\ x + 2y = 8 - t \end{cases} \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4 - t$ Solución: $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

4.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$, es paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z.

La recta pedida estará contenida en el plano que contiene el punto A y el eje OZ, vamos a hallar dicho plano: punto $A(1,1,-1)$, $\vec{d}(0,0,1)$, $\vec{e} = \overrightarrow{OA} = (1,1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y-1-x+1=0 \Rightarrow x-y=0$$

Vector de dirección de la recta pedida será perpendicular al vector normal de este plano $(\vec{n}(1,-1,0))$, ya que está contenida en él y también perpendicular al vector normal del plano que nos dan $(\vec{n}'(1,-1,1))$, ya que es paralela a él.

Luego el vector de dirección buscado será: $\vec{d} = (1,-1,0) \times (1,-1,1) = (-1,-1,0)$

Recta pedida: pasa por $A(1,1,-1)$ y tiene vector de dirección $(-1,-1,0)$

$$r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8-x^2|$

a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f .

$$8-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2} \rightarrow f(x)=|8-x^2| = \begin{cases} x^2-8 & \text{si } x < -2\sqrt{2} \\ 8-x^2 & \text{si } -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ x^2-8 & \text{si } x > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2\sqrt{2} \\ -2x & \text{si } -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ 2x & \text{si } x > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0$$

Los posibles extremos relativos están en

0 y en los puntos angulosos, es decir en

$-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$

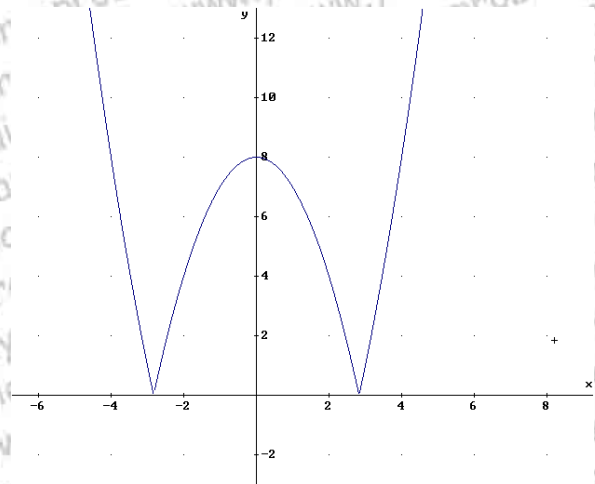
$$f'(x) < 0 \quad \text{si } x < -2\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{si } -2\sqrt{2} < x < 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{si } 0 < x < 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{si } x > 2\sqrt{2} \rightarrow \text{Máximo } (0,8), \text{ Mínimos } (-2\sqrt{2},0), (2\sqrt{2},0)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^{2\sqrt{2}} (8-x^2) dx + \int_{2\sqrt{2}}^4 (x^2-8) dx = 8x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3} - 8x \Big|_{2\sqrt{2}}^4 \\ &= 8\sqrt{8} - \frac{8\sqrt{8}}{3} - 0 + \frac{64}{3} - 32 - \frac{8\sqrt{8}}{3} + 8\sqrt{8} = 16\sqrt{8} - \frac{16\sqrt{8}}{3} - \frac{32}{3} = \frac{64\sqrt{2}-32}{3} \end{aligned}$$



2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

Primer trozo, continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, o sea lo es en el intervalo $(-\infty, 0)$

Segundo trozo, polinómica, continua y derivable en el intervalo $(0, \infty)$

Veamos que pasa en el punto $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 - 0 - 1 = -1 \\ \text{Continuidad: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x - 1) = -1 \end{aligned} \right\} \text{Continua en } x=0$$

Derivabilidad:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{h-1} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h(h-1)} = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 3h - 1 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h-3)}{h} = -3 \end{aligned} \right\} \text{NO}$$

La función no es derivable en $x = 0$

b) Determina sus asíntotas.

El segundo trozo es una función polinómica, no tiene asíntotas, pero el primer trozo es una racional, veamos las asíntotas:

Verticales: en $x = 1$, pero no está en el intervalo, luego no tiene

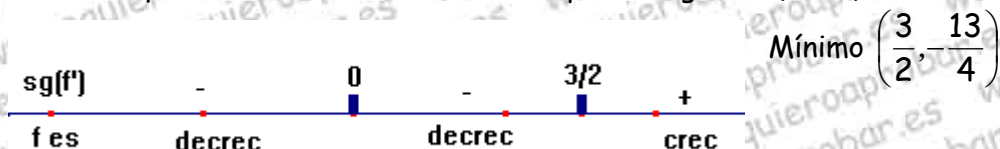
Horizontal: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ eje x por al izquierda $\rightarrow y = 0^+$

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su mínimo relativo.

Hallamos primero el mínimo:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} = 0, \text{ no} \\ 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tenemos que tener en cuenta también el punto angular ($x = 0$):



Recta tangente en ese punto: $y + \frac{13}{4} = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = -\frac{13}{4}$

Lógicamente, recta horizontal

3.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 1-m+m-4-1-2+2m = 2m-6 = 0 \Rightarrow m=3$$

Existe la inversa cuando $m \neq 3$

b) Resuelve el sistema $AX=B$ para $m=2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hallamos } A^{-1}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow AX=B \rightarrow X=A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z-2 \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $A(1,2,3)$.

$$\vec{n}(\text{plano}) = \vec{d}(\text{recta}) = (2, -1, 1) \rightarrow 2x - y + z + D = 0$$

$$\text{pasa por } A \rightarrow 2-2+3+D=0 \Rightarrow D=-3 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$$

b) Determina las coordenadas del punto B , simétrico de A respecto de la recta r .

Hallamos la intersección de r con el plano perpendicular calculado en el apartado A, se cortan en el punto P , que es el punto medio del segmento AA' (A' simétrico de A)

$$2(1+2\lambda) - (1-\lambda) + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$P(1,1,2) \rightarrow (1,1,2) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{3+z}{2} \right) \rightarrow A'(1,0,1)$$