1. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

2. Encuentra el punto de la recta $x+y=4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

   a) Halla su dominio, puntos de corte con los ejes y simetrías.

   b) Halla las asíntotas horizontales y verticales.

   c) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

   d) Haz una representación gráfica aproximada.

4. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $y=\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$

   b) $y=\cos\sqrt{\ln x}$

5. Halla las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int\frac{x+36}{4+9x^2}\,dx$

   b) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$

6. Resuelve la ecuación matricial $AXB=B^2$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

7. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r\equiv\begin{cases}x+z=1\\ y+z=0\end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.

   b) Halla las ecuaciones de una recta s contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(1,0,0)$.

SOLUCIONES

1. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

Solución:

Cuando $x \to 0$, $\cos x \to 1 \Rightarrow 1-\cos x \to 0$. Por otro lado, también cuando $x \to 0$, $e^x \to 1 \Rightarrow \left(e^x-1\right)^2 \to 0$. Esto quiere decir que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos de esta manera aplicar la regla de L'Hôpital, según la cual, llamando $f(x)=1-\cos x$ y $g(x)=\left(e^x-1\right)^2$, se tiene: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$f'(x)=0-(-\operatorname{sen} x)=\operatorname{sen} x$, $g'(x)=2\left(e^x-1\right)e^x$. Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital se tiene: $f''(x)=\cos x$, $g''(x)=2\left[e^xe^x+\left(e^x-1\right)e^x\right]=2\left[e^x\left(e^x+e^x-1\right)\right]=2e^x\left(2e^x-1\right)$, con lo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2e^x\left(2e^x-1\right)}=\frac{1}{2(2-1)}=\frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}$.

2. Encuentra el punto de la recta $x+y=4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

Solución:

Se trata de encontrar un punto (x, y) tal que x^2+y^2 sea mínima, bajo la condición $x + y = 4$. De esta última igualdad se obtiene $y = 4 - x$. Sustituyendo este valor en la expresión x^2+y^2, lo que tendremos que hacer entonces es minimizar la función $f(x)=x^2+(4-x)^2$.

$f'(x)=2x+2(4-x)(-1)=2x-8+2x=4x-8$. Por tanto $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-8=0$ $\Leftrightarrow x = 2$ (este punto es un posible extremo relativo).

$f''(x)=4 \Rightarrow f''(2)=4>0$. Entonces $x = 2$ es un mínimo relativo. El valor de y será $y = 4 - x = 4 - 2 = 2$

Así pues, el punto de la recta $x + y = 4$, que cumple que la suma de los cuadrados de sus coordenadas es mínima es $(2, 2)$.

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

a) Halla su dominio, puntos de corte con los ejes y simetrías.

b) Halla las asíntotas horizontales y verticales.

c) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

d) Haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

a) Por tratarse de una función racional el dominio será el conjunto de los números reales excepto aquellos que anulen el denominador. $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$, $x=-2$. Por tanto $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2, 2\}$.

Los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. Hacemos pues $y=0 \Rightarrow$ $\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow x^2+3=0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto la función no corta al eje X.

Los puntos de corte con el eje Y son de la forma $(0, y)$. Hacemos pues $x = 0 \Rightarrow$ $y=\dfrac{0^2+3}{0^2-4}=-\dfrac{3}{4}$. Por tanto la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=f(x) \Rightarrow f$ es par (simétrica respecto del eje Y).

b) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=1 \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: hemos visto antes que $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$, $x=-2$. Entonces

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\infty=\begin{cases}-\infty & si\ \ x\to 2^-\\ +\infty & si\ \ x\to 2^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\infty=\begin{cases}-\infty & si\ \ x\to -2^-\\ +\infty & si\ \ x\to -2^+\end{cases}$$

Por tanto $x = 2$, $x = -2$ son asíntotas verticales.

c) $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{2x^3-8x-2x^3-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\Leftrightarrow-14x=0\Leftrightarrow x=0$ (este es un posible extremo relativo).

Estudiemos ahora el signo de la primera derivada:

$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$
creciente	creciente	decreciente	decreciente

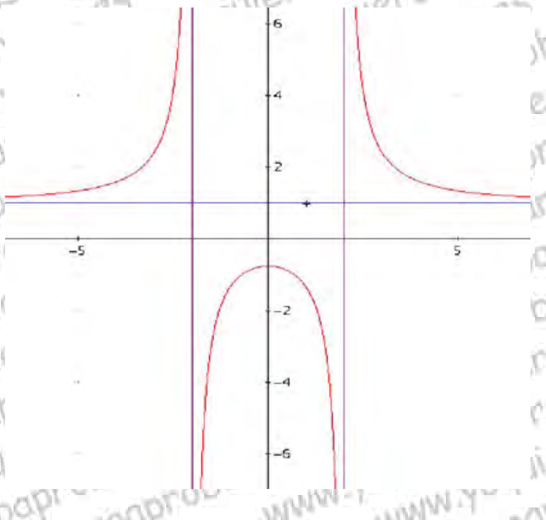
De aquí se deduce que f es creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decreciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$. Además en $x = 0$, f pasa de ser creciente a decreciente, con lo que el punto $x = 0$ es un máximo relativo. En concreto el punto $\left(0,-\dfrac{3}{4}\right)$, pues $f(0)=-\dfrac{3}{4}$.

Obsérvese que no es necesario recurrir al estudio de la segunda derivada para deducir que $x = 0$ es un máximo relativo. En cualquier caso comprobemos que $f''(0)<0$.

$$f''(x)=\frac{-14\left(x^2-4\right)^2-(-14x)2\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{\left(x^2-4\right)\left(-14x^2+56+56x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^4}=$$

$=\dfrac{42x^2+56}{\left(x^2-4\right)^3}\Rightarrow f''(0)=\dfrac{42\cdot 0^2+56}{\left(0^2-4\right)^3}=\dfrac{56}{(-4)^3}=\dfrac{56}{-64}=-\dfrac{7}{8}<0\Rightarrow x=0$ es un máximo relativo.

d)



4. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}$

b) $y=cos\sqrt{ln\,x}$

Solución:

a) $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}\frac{(cos\,x)\,x-sen\,x}{x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{sen\,x}}\frac{x\,cos\,x-sen\,x}{x^2}=\sqrt{\frac{x}{sen\,x}}\frac{x\,cos\,x-sen\,x}{2x^2}$

También se puede simplificar así, racionalizando para evitar raíces en el denominador:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}\frac{(cos\,x)\,x-sen\,x}{x^2}=\frac{\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}{2\frac{sen\,x}{x}}\left(\frac{cos\,x}{x}-\frac{senx}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}{2\frac{sen\,x}{x}}\frac{cos\,x}{x}-\frac{\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}{2\frac{sen\,x}{x}}\frac{sen\,x}{x^2}=\frac{cos\,x\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}{2sen\,x}-\frac{\sqrt{\frac{sen\,x}{x}}}{2x}$$

b) $y'=-sen\sqrt{ln\,x}\,\frac{1}{2\sqrt{ln\,x}}\frac{1}{x}=\frac{-sen\sqrt{ln\,x}}{2x\sqrt{ln\,x}}$

5. Halla las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int\frac{x+36}{4+9x^2}dx$

b) $\int\frac{ln\,x}{x^2}dx$

Solución:

a) Es inmediata ("logaritmo + arcotangente") si la descomponemos en otras dos:

$$\int\frac{x+36}{4+9x^2}dx=\int\frac{x}{4+9x^2}dx+\int\frac{36}{4+9x^2}dx$$

$$\int\frac{x}{4+9x^2}dx=\frac{1}{18}\int\frac{18x}{4+9x^2}dx=\frac{1}{18}ln\left(4+9x^2\right)+C$$

$$\int\frac{36}{4+9x^2}dx=\int\frac{9}{1+\frac{9x^2}{4}}dx=\int\frac{9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{\frac{3}{2}9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx=6\int\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}dx=$$

$$= 6arctg\left(\frac{3x}{2}\right)+C$$

Por tanto

$$\int \frac{x+36}{4+9x^2}dx = \int \frac{x}{4+9x^2}dx + \int \frac{36}{4+9x^2}dx = \frac{1}{18}ln\left(4+9x^2\right)+6arctg\left(\frac{3x}{2}\right)+C$$

b) Integrando por partes:

$$\int \frac{ln\,x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} u = ln\,x & dv = \frac{1}{x^2}dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{-1}{x} \end{bmatrix} = ln\,x\left(\frac{-1}{x}\right) - \int\left(\frac{-1}{x}\right)\frac{1}{x}dx = \frac{-ln\,x}{x} - \int\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{-ln\,x}{x} - \frac{1}{x} + C = \frac{-ln\,x - 1}{x} + C$$

6. Resuelve la ecuación matricial $AXB = B^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Multiplicando por la izquierda por la inversa de A y por la derecha por la inversa de B se tiene: $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}B^2B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B^2B^{-1}$

Hallemos la inversa de A:

Determinante de A: $|A| = (0+0+0)-(-1+0+0) = 1$

Matriz adjunta de A: $A^d = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Traspuesta de la adjunta de A: $\left(A^d\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hallemos la inversa de B:

Determinante de B: $|B| = (1+0+0)-(2+0+0) = -1$

Matriz adjunta de B: $B^d = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Traspuesta de la adjunta de B: $\left(B^d\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de B: $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Además $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = A^{-1}B^2B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observa que también lo podríamos haber hecho así y es más rápido:

$$X = A^{-1}B^2B^{-1} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.

   b) Halla las ecuaciones de una recta s contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(1,0,0)$.

Solución:

a) Es muy fácil pasar la recta a paramétricas. Llamando $z=\lambda$, se tiene claramente $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Por tanto dos puntos de la recta son, por ejemplo: $A(1,0,0)$ y $B(0,-1,1)$. Como el plano π que se busca debe pasar por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, tiene vectores directores $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$ y $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0+0-z)-(0+y+0)=0 \Leftrightarrow -y-z=0$$

y el plano buscado es $\pi \equiv -y-z=0 \Rightarrow \pi \equiv y+z=0$.

b) Un vector perpendicular al plano es $\vec{u}=(0,-1,-1)$. Un vector director de la recta r es $\vec{v}=(-1,-1,1)$ El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ que tiene dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así pues una recta que tenga por vector director $\vec{w}$ será perpendicular a *r*. Por tanto la recta *s* que nos piden es aquella cuyo vector director es $\vec{w}$ y pasa por $P(1,0,0)$ (observa que $P \subset \pi$, y entonces también $s \subset \pi$).

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(-\vec{i}+\vec{j}+0\right)-\left(\vec{k}+0+\vec{i}\right) = -2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \vec{w}=(-2,1,-1)$$

Entonces $s \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$.