

TEOREMAS (VALOR MEDIO)

- 1) Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, comprueba que cumple las condiciones del teorema del Valor Medio en el intervalo $[1, 4]$. Halla el valor de c que determina este teorema.
- 2) ¿Se puede aplicar el Teorema del valor medio a la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo $[0, 8]$? ¿Y en el intervalo $[-4, 4]$?
- 3) Aplica el Teorema del Valor Medio a la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ entre $x = 1$ y $x = 4$. Halla el valor c determinado por este teorema.
- 4) Explica qué teorema debes usar para calcular una recta que sea tangente a la curva $y = \sin x$ en un punto cuya abscisa esté en el intervalo $(0, 2\pi)$ y además sea paralela a la cuerda definida por los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 1)$. Calcula la ecuación de esta recta.
- 5) Dada la parábola $f(x) = 3x^2$, encuentra un punto en que la tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos $(0,0)$ y $(4,48)$.
- 6) Comprueba que la función $f(x) = |x - 2|$ no cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 3]$.
- 7) Dada la función $f(x) = e^x$, halla las coordenadas del punto de tangencia de una paralela a la cuerda que une los extremos $(0, 1)$ y $(1, e)$. Representa la figura.

SOLUCIONES

1) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ es continua en $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$, ya que es una función polinómica. Aplicamos el Teorema del Valor Medio:

$$\exists c \in (1,4) / f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \rightarrow f'(c) = 3c^2 - 2c = \frac{50 - 2}{3} \Rightarrow 3c^2 - 2c - 16 = 0$$

de donde obtenemos $c = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{6} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$, descartamos -2 porque no pertenece al intervalo $(1,4)$, luego $c = 3$

2) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ esta función es continua en $[0,8]$ y derivable en $(0,8)$, luego podemos aplicar en este intervalo el Teorema del Valor Medio, cosa que no podemos hacer en el intervalo $[-4,4]$, ya que f no es derivable en $0 \in (-4,4)$

$$\exists c \in (0,8) / f'(c) = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} \rightarrow f'(c) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{-3 - 1}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$3\sqrt[3]{c} = 4 \Rightarrow c = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2.37 \in (0,8)$$

3) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ esta función es continua en $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$, ya que es una función polinómica, entonces, aplicando el TVM:

$$\exists c \in (1,4) / f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \rightarrow f'(c) = -2c + 6 = \frac{3 - 0}{3} \Rightarrow -2c + 6 = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in (1,4)$$

4) $y = \sin x$, para hallar el punto en el que la tangente es paralela a la cuerda, tendremos que aplicar el Teorema del Valor Medio

$y = \sin x$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \rightarrow$ continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) / f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \rightarrow f'(c) = \cos c = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \cos c = \frac{2}{\pi} \Rightarrow c = 0.88 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Recta tangente en $x = c = 0.88 \rightarrow y - f(c) = f'(c)(x - c) \rightarrow y - 0.77 = \frac{2}{\pi}(x - 0.88)$

5) $f(x) = 3x^2$ es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$, por ser una función polinómica

$$\exists c \in (0,4) / f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \rightarrow f'(c) = 6c = \frac{48 - 0}{4} \Rightarrow 6c = 12 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$$

el punto en el que la tangente es paralela a la cuerda es el punto $(2,12)$

6) $f(x) = |x - 2|$ esta función es continua en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = 2$, ya que:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x - 2 < 0 \\ x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$ no es derivable en $2 \in (0,3)$

7) $f(x) = e^x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (exponencial), es decir, cumple las hipótesis del TVM en el intervalo dado: f es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$

$$\exists c \in (0,1) / f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \rightarrow f'(c) = e^c = \frac{e - 1}{1} \Rightarrow e^c = e - 1 \Rightarrow \text{para resolver esta}$$

ecuación aplicamos logaritmos: $\ln e^c = \ln(e - 1) \Rightarrow c = \ln(e - 1) \in (0,1)$

en ese punto $c = \ln(e - 1)$, la tangente es paralela a la cuerda