Ejercicios resueltos del Teorema de Bolzano

1. Demostrar que la ecuación $e^{-x}+2=x$ tiene al menos una solución real.

La función $f(x)=e^{-x}+2-x$ es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0,3]$. Como además $f(0)=3>0$ y $f(3)<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,3): f(c)=0$, esto es, $\exists c\in(0,3): e^{-c}+2-x=0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

2. Demostrar que existe al menos un número real x tal que $\operatorname{sen} x = x$.

Consideramos la función $f(x)=\operatorname{sen} x - x$ que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[-\pi,\pi]$. Como además $f(-\pi)=\pi>0$ y $f(\pi)=-\pi<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(-\pi,\pi): f(c)=0$, esto es, $\exists c\in(-\pi,\pi): \operatorname{sen}(\mathrm{c})-c=0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial). Como consecuencia, $\exists x\in(-\pi,\pi)$ (que es c) tal que $\operatorname{sen} x = x$.

3. Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en un punto.

Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=\log x - e^{-x}$ que es continua en $\mathbb{R}^+$, por ser diferencia de funciones continuas, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)<0$ y $f(2)>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(1,2): h(c)=0$, esto es, $(c,h(c))$ es el punto de corte de ambas funciones.

4. ¿Tiene la ecuación $x^5-3x=1$ alguna solución comprendida entre 1 y 2?

Consideramos la función $f(x)=x^5-3x-1$ que es continua en $\mathbb{R}$, por una función polinómica, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)=-3<0$ y $f(2)=25>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(1,2): f(c)=0$, esto es, la ecuación dada tiene una solución en el intervalo pedido.