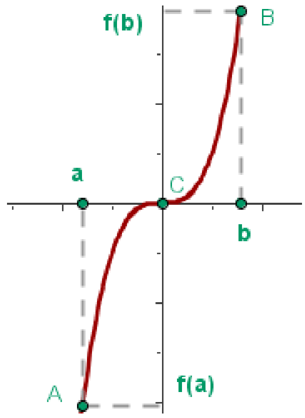
Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un c $\in$ (a, b) tal que f(c) = 0.



<u>Ejemplo 1:</u> Comprobar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0,1].

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 1$, que es continua en [0,1] por ser polinómica. Estudiamos el signo en los extremos del intervalo:

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Como los signos son distintos se cumple el teorema de Bolzano, por tanto existe un c $\in$ (0, 1) tal que f(c) = 0. Lo que demuestra que tiene una solución en ese intervalo.

<u>Ejemplo 2:</u> Comprobar que la ecuación x^3 - 3x +40 = 0 tiene alguna raíz real.

Aproximar su valor hasta las centésimas.

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x + 40 = 0$, continua en todos los reales por ser una función polinómica.

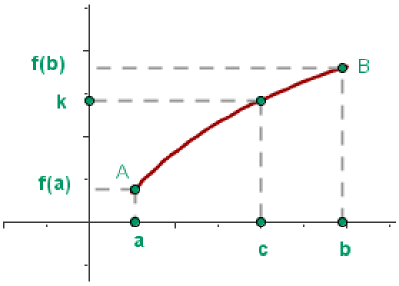
Tanteando, encontramos que f(-4) = -12, f(-3)=22.

Entonces, f es continua en [-4,-3] y como f(-4) <0 y f(-3) >0, se cumple el teorema de Bolzano, por tanto existe un c $\in$ (-4, 3) tal que f(c) = 0. La raíz de la ecuación es c.

Ahora tanteando con valores decimales, obtenemos f(-3,8) = -3,472, f(-3.7) = 0,447. Por lo tanto, podemos asegurar que el número -3,7 se aproxima en menos de una décima a una raíz de la ecuación dada.

Teorema de los valores intermedios (Propiedad de Darboux)

Si una función es continua en el intervalo [a, b] y k es un número comprendido entre los valores f(a) y f(b), entonces existe algún c en (a, b) tal que f(c) = k.



Si observamos el dibujo podemos definir la propiedad de Darboux de este otro modo:

Si una función es continua en el intervalo [a, b] la función alcanza en este intervalo todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).

<u>Ejemplo:</u> Probar que la función f(x) = x(sen x +1) toma el valor 2.

La función es continua en toda $\mathbb{R}$ por ser el producto de dos funciones continuas.

Tomamos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y estudiamos el valor de las imágenes de los extremos:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0<2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi>2$$

Por tanto existe un $c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que f(c) = 2.

Consecuencias del teorema de los valores intermedios.

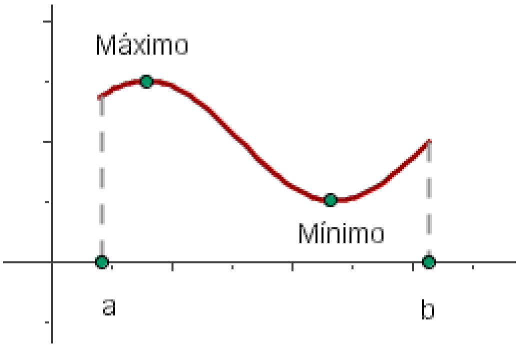
Si f y g son funciones continuas en [a,b] y f(a)<f(b) y f(b) >f(a), entonces existe un número c $c\in(a,b)$ tal que f(c)=g(c).

Teorema de Weierstrass

Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].

Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:

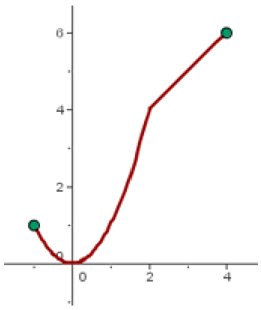
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad Si\ \ x \in [a,b]$$



El **teorema de Weierstrass** *no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo*, sólo afirma que existen.

__**Ejemplo:**__

$$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ \mathrm{x} < 2 \\ x+2,\ si\ x \geq 2 \end{cases}$$ es continua en el intervalo [−1, 4]



$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \rightarrow\ 0 \leq f(x) \leq 6 \ \ Si\ x \in [-1,4]$$

Problemas del teorema de Bolzano

1. Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo [0,2].¿Se puede decir lo mismo de la función: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$?

2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

¿Se puede afirmar que f(x) está acotada en el intervalo [1,4]?

3. Sea la función $f(x)= x^2 + 1$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo [1,5]?

4. Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación: $x^3 + x - 5 = 0$, tiene al menos una solución $x = a$ tal que $1 < a < 2$.

5. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto c en el interior del intervalo [1,2] tal que $f(c) = 0$?

6. Justificar que la función polinómica $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene un cero comprendido entre -1 y 0.

7. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real.

8. Demostrar que existe algún número real x tal que sen x = x.

9. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \neq 0 \\ 7 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestra que existe un punto del intervalo abierto (2, 4) en el que f toma el valor 1.

Ejercicios del teorema de Bolzano y de Weierstrass

1. Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo $[1, 5]$ e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.

2. Probar que la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1$ es continua para toda $\mathbb{R}$ y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

3. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que $\exists\ c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.