

REPASO DE GEOMETRÍA

* PRODUCTO ESCALAR: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ es un número.

* PRODUCTO VECTORIAL: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \dots$ es un vector

* LA RECTA

$\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
PUNTO: $A(x_1, y_1, z_1)$
VECTOR DIRECTOR: $\vec{AB}$ ó $\vec{u}_r$ ó $\vec{d}_r$

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases}$$

$$r: \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$$

También puede venir dada por la intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \rightarrow \text{De ahí sacamos un punto haciendo } x=0 \text{ ó } y=0 \text{ ó } z=0 \text{ (lo que nos convenga)}$$

$\rightarrow$ Y un vector director:

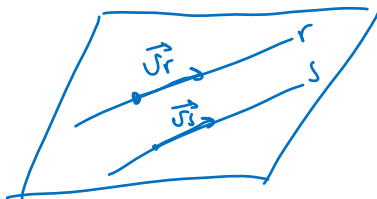
$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = \dots$$

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS: r y s .

Calculo: $\vec{u}_r$ $\vec{u}_s$
 P_r P_s

si $r(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1$ o dicho de otra forma si $\vec{u}_r = \alpha \vec{u}_s$ son proporcionales

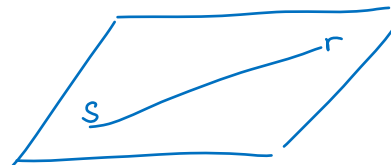
entonces las rectas son así:



PARALELAS

si $P_r \notin s$

ó

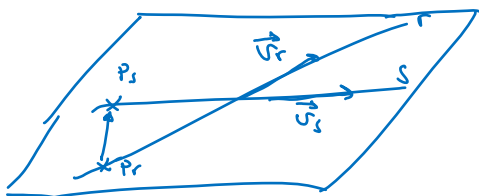


COINCIDENTES

si $P_r \in s$

Si $r(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ o dicho de otra forma $\vec{u}_r \neq \alpha \vec{u}_s$
 $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ son L.I.

entonces determinamos $\vec{P_r P_s}$

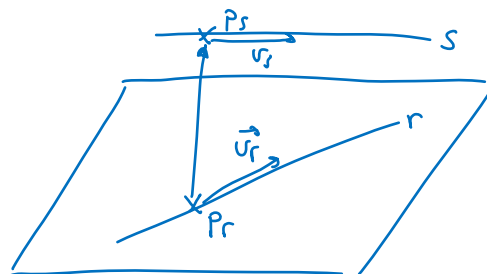


$$r(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 2$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 0$$

RECTAS SECANTES

RECTAS QUE INCIDEN EN UN PUNTO



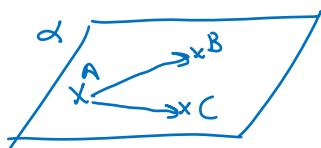
$$r(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 3$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) \neq 0$$

RECTAS QUE SE CRUZAN

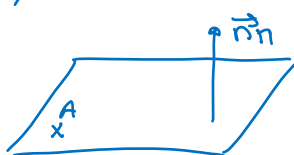
El pto de corte se determina igualando las dos rectas en paramétricas
 (recuerda que hay que cambiar uno de los parámetros)

EL PLANO



* Necesitamos un pto y dos vectores directores
 (o tres puntos)

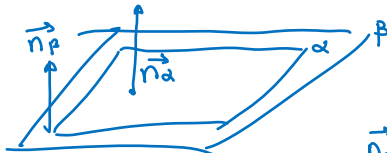
$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0;$$



* Necesitamos un punto y un vector normal

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{donde } \vec{n} = (A, B, C)$$

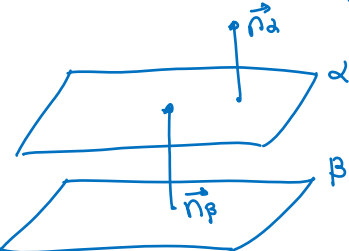
POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS ENTRE SI



COINCIDENTES.

$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \quad \text{Además } P_\alpha \in \beta$$

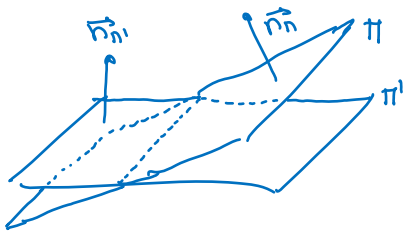
$\vec{n}_\alpha$ y $\vec{n}_\beta$ proporcionales



PARALELOS $\alpha \parallel \beta$

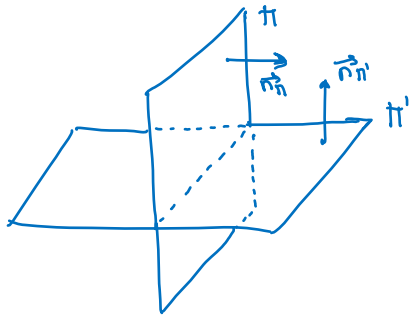
$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \quad \text{Además } P_\alpha \notin \beta$$

$\vec{n}_\alpha$ y $\vec{n}_\beta$ proporcionales



SECANTES.

$\vec{n}_\pi$ y $\vec{n}_{\pi'}$ no son paralelos
o $r(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) = 2$

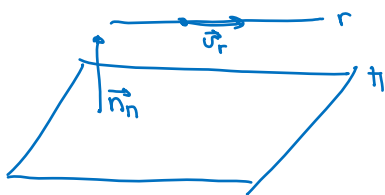


SECANTES PERPENDICULARES

$\pi \perp \pi'$ si $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'}$

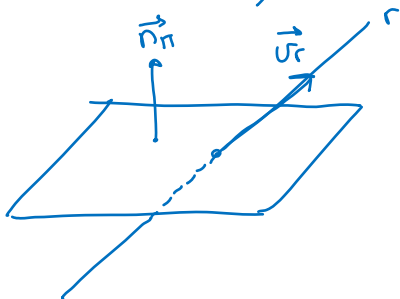
Condición: $\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0$
producto escalar.

POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS Y RECTAS



RECTA PARALELA AL PLANO

$r // \pi$ cuando $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ luego $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$
producto escalar.



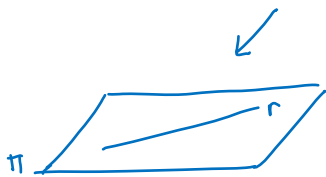
RECTA SECANTE (intersección en un punto) CON EL PLANO.

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$

Hay un caso particular: RECTA PERPENDICULAR AL PLANO

$r \perp \pi$ si $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$ y además

$\vec{v}_r = \alpha \cdot \vec{n}_\pi$ ($\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$ proporcionales).



$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

Además, todos los pts de r están contenidos en π .

Para determinar el punto de corte:

$$r \equiv (x_0 + \lambda v_1, y_0 + \lambda v_2, z_0 + \lambda v_3)$$

coordenadas genéricas de un punto de r

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

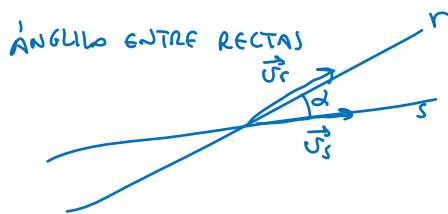
Empleamos una sola incógnita (λ) que nos permite conseguir el pto de corte:

$a \neq 0$; recta y plano secantes.
 $0 \neq b$; recta y plano paralelos
 $0 \neq 0$; recta contenida en el plano

ÁNGULO ENTRE RECTAS Y PLANOS

Todas las fórmulas vienen de la definición de producto escalar:

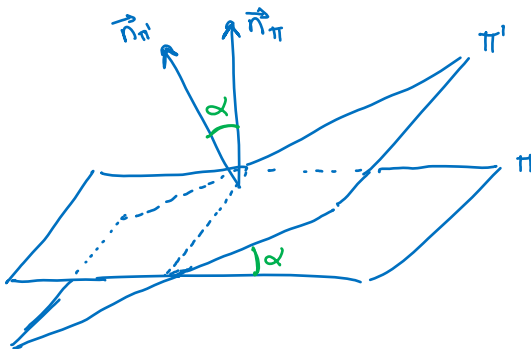
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ donde despejamos } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



NO OLVIDAR

$$\cos \alpha = \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}$$

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

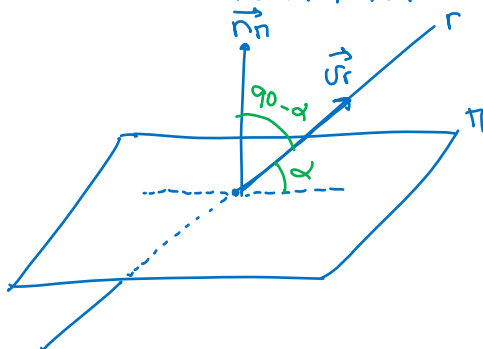


RECUERDA: VALOR ABSOLUTO.

$$\cos \alpha = \cos(\pi, \pi') = \cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|}$$

MÓDULO DE UN VECTOR

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO



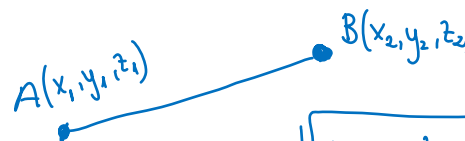
¡¡CUIDADO!!

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}$$

Después calculamos α
 $\alpha \rightarrow$ ángulo entre r y π .

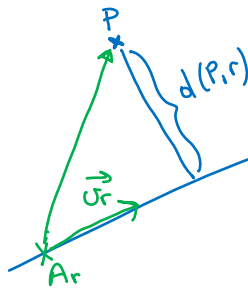
DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



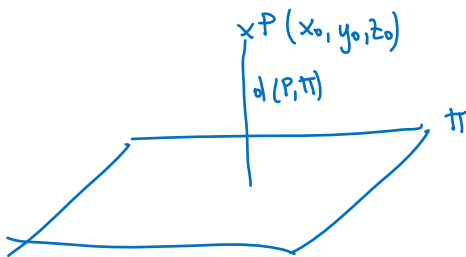
$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA



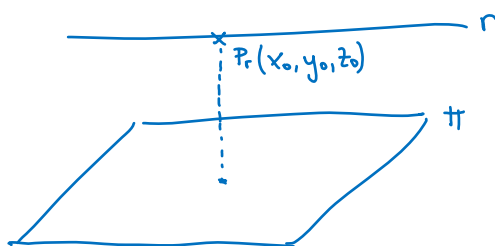
$$d(P, r) = \frac{|\vec{ArP} \times \vec{ur}|}{|\vec{ur}|}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO



$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

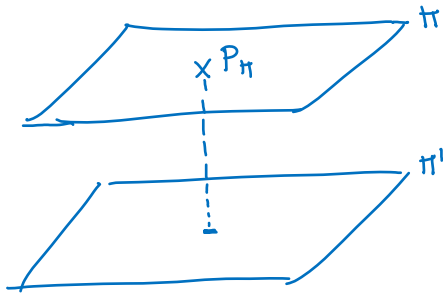
DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PLANO



Previamente determinamos la posición relativa de estos
 $r // \pi$ luego $\vec{ur} \cdot \vec{n} = 0$.
 (si no, $d(r, \pi) = 0$).

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

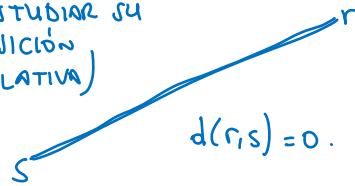
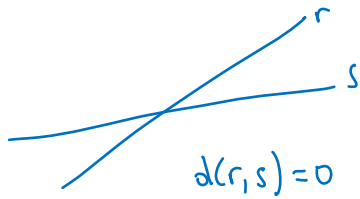
DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS



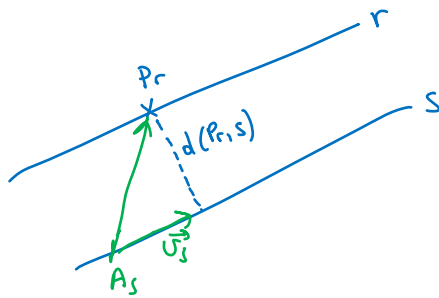
$$d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi') = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

DISTANCIA ENTRE RECTAS

(PREVIAMENTE HAY QUE ESTUDIAR SU POSICIÓN RELATIVA)

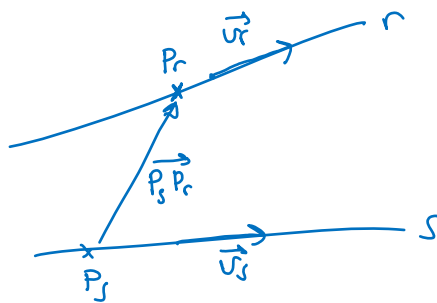


ENTRE RECTAS PARALELAS:



$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\vec{A_s P_r} \times \vec{u_s}|}{|\vec{u_s}|}$$

ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN



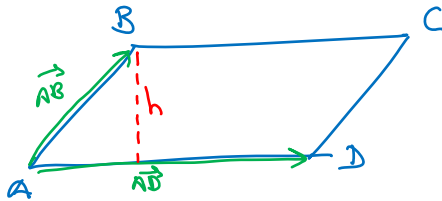
valor absoluto

$$d(r, s) = \frac{|\det(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{P_r P_s})|}{|\vec{u_r} \times \vec{u_s}|}$$

módulo

ÁREAS Y VOLUMENES

Paralelogramo



producto vectorial

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

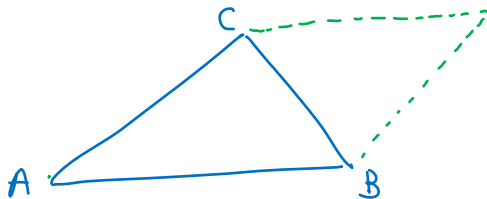
módulo

* Si me pidieran altura del paralelogramo sobre la base $\vec{AD}$:

modo 1: Determinamos recta que pasa por A y D
y después $d(B, r_{AD})$

modo 2: Calculamos la longitud de la base: $|\vec{AD}|$
y después $\text{Área} = \underbrace{|\vec{AD}|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altura}}$.
calculada previamente

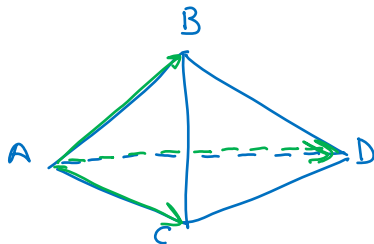
ÁREA DEL TRIÁNGULO



(mitad del paralelogramo correspondiente)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

VOLUMEN DEL TETRAEDRO



valor absoluto

$$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

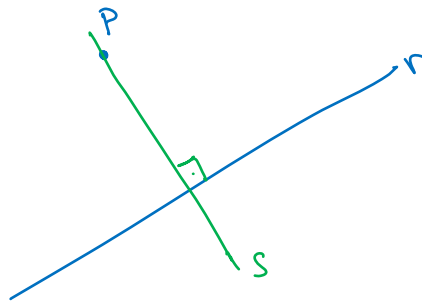
producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$

número

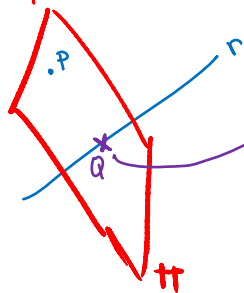
Si me pidieran la altura del tetraedro
desde el vértice B.

Determinamos el plano que contiene a A, C, D
y después $d(B, \text{plano})$

RECTA PERPENDICULAR A UNA DADA (r) QUE PASE POR P



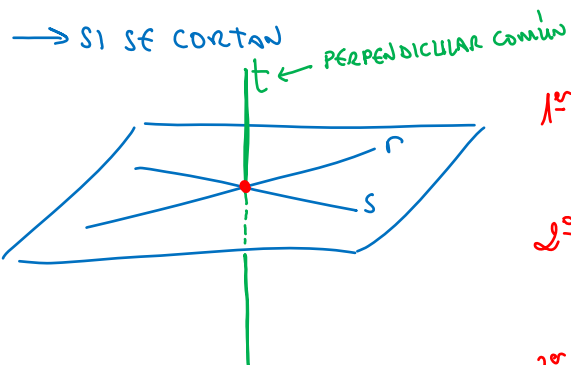
1º paso: Determinamos EL PLANO QUE CONTIENE A " P " Y ES PERPENDICULAR A " r ".



2º paso: Determinamos Q (pto de corte de r y Π)

3º paso: Recta s que pasa por los puntos P y Q

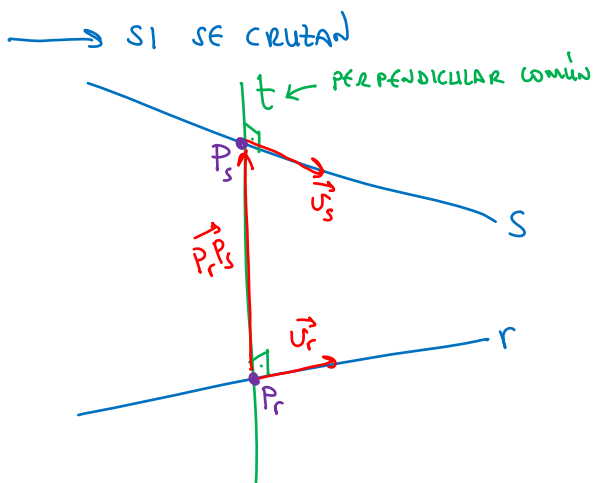
RECTA PERPENDICULAR COMÚN A OTRAS DOS :
(Previamente estudiamos su posición relativa)



1º paso: Determinación del pto de corte .

2º paso: Determinación de $\vec{U}_t$
 $\vec{U}_t = \vec{U}_R \times \vec{U}_S$

3º paso: Determinación de una recta dados pto y vector director



1º paso:
Expresamos $P_R(x_0 + \lambda v_1, y_0 + \lambda v_2, z_0 + \lambda v_3)$
 $P_S(x'_0 + \mu v'_1, y'_0 + \mu v'_2, z'_0 + \mu v'_3)$

2º paso:
Determinamos el vector
 $\vec{P_R P_S} = (\dots, \dots, \dots)$
en función de λ y μ

3º paso:

Como $\vec{P_R P_S} \perp \vec{U_R}$, entonces $\vec{P_R P_S} \cdot \vec{U_R} = 0$
Como $\vec{P_R P_S} \perp \vec{U_S}$, entonces $\vec{P_R P_S} \cdot \vec{U_S} = 0$ } SISTEMA DE
DOS EC. CON
DOS INCÓGNITAS
 λ y μ

4º paso:

Determinación de la recta "t"
que pasa por R y S.

...

y volvin volando, este cuento

SE HA ACABADO