

Problema 1 Sean los vectores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (m, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, -3, -4)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ m & 2 & 1 \\ m & -3 & -4 \end{vmatrix} = 5(m^2 + 2m - 3) = 0 \implies m = 1, m = -3$$

Si $m = 1$ o $m = -3$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\vec{u} = (m, -5, 3)$ y $\vec{v} = (2m, m, 1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\vec{u} = (1, 3, 1)$ y a $\vec{v} = (-1, 5, 0)$ que tenga módulo 3.
3. Decidir si los vectores $\vec{u} = (5, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3, -2)$ son perpendiculares.

Solución:

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2m^2 - 5m + 3 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 3/2$$

2.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-5, -1, 8) \implies |\vec{w}| = 3\sqrt{10}$$

$$\vec{t} = \frac{3}{3\sqrt{10}}(-5, -1, 8) = \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{10}}{10}, \frac{4\sqrt{10}}{5} \right)$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = 5 - 3 - 2 = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$$

Problema 3 Sean los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (0, -1, 3)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\vec{v}$.
3. Altura del paralelepípedo.
4. Volumen del tetraedro que determinan.
5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\vec{v}$.
6. Altura del tetredro.

Solución:

1.

$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16 u^3$$

2.

$$S_p = |\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |(-2, 2, 6)| = 2\sqrt{11} u^2$$

$$S_p = |\vec{v}| \cdot h_p \implies h_p = 2\sqrt{\frac{11}{10}} u$$

3.

$$V_p = S_p \cdot H_p \implies H_p = \frac{8\sqrt{11}}{11} u$$

4.

$$V_t = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} u^3$$

5.

$$S_t = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} u^2, \quad h_t = h_p = \sqrt{\frac{11}{10}} u$$

6.

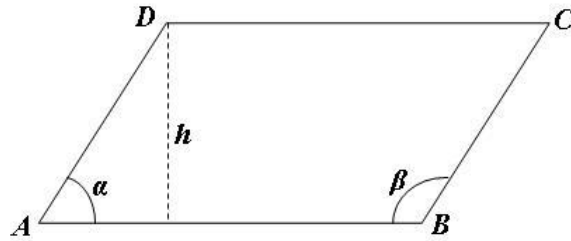
$$H_t = H_p = \frac{8\sqrt{11}}{11} u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(4, -2, -3)$ y $C(7, 2, 5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Encontrar el 4º vértice D .
2. Calcular la longitud de sus lados.
3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C .
5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (1, 0, 1) + (3, 4, 8) = (4, 4, 9)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3, -2, -4)| = \sqrt{29}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3, 4, 8)| = \sqrt{89}$
- 3.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-31}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{89}} \Rightarrow \alpha = 127^\circ 36' 13'' \text{ y } \beta = 52^\circ 23' 47''$$

El centro es $M(4, 1, 3)$

4. $C = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2C - A = (13, 4, 9)$
- 5.

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \vec{u} = (1, 0, 1) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(3, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \vec{u} = \left(3, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(5, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \vec{u} = \left(5, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = (7, 2, 5)$$