Examen de Matem´aticas 2ºBachillerato(CN)

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz = & 1\\ 2x+ & 4y+ & z = & 3\\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.
2. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.
3. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

(Modelo 2016 - Opción A)
Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & k & 1\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = \frac{1}{2}$$

   Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
   Si $k = 1$:

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right);\ |A| = 0;\ \left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   $$|A_1| = |A| = 0;\ \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 0;$$

   $$|A_3| = \left|\begin{array}{crc} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0;\ \ |A_4| = \left|\begin{array}{crc} 2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0$$

   $\left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$
   Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es

compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \ |A| = 0; \ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

2. Si $k = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array} \right.$$

3. Si $k = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

2. (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

3. (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

(Septiembre 2005 - Opción A)
Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 2, \ \ \beta = -1$$

2.

$$A^5 = A^2A^2A = (2A-I)^2A = (4A^2+I^2-4AI)A = (4A^2-4A+I)A =$$

$$4(2A-I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A-I) + A =$$

$$8(2A-I)-4A-8A+4I+A = 5A-4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$(A-X)(A+X) = A^2 - X^2 \Longrightarrow A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2$$

$$\Longrightarrow AX - XA = 0 \Longrightarrow AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = d \end{array} \right.$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

(Junio 2006 - Opción B)

Solución:

1.

$$|M| = -2a(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 1, \;\; a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

2. M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$
(Junio 2007 - Opción A)
Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6a-9c = 0 \\ b-d = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = d \\ c = 2/3a \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$