Examen de Matem ´aticas 2ºBachillerato(CN)

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 3 \\ m & 1 & 2 & m \\ -6 & 3 & -14 & m \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 1 & 2 \\ -6 & 3 & -14 \end{vmatrix} = 14m^2 - 15m - 26 = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = -13/4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & m \\ -6 & 3 & m \end{vmatrix} = -m^3 - 6m^2 + 7m + 18 = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = -4 \pm \sqrt{7}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ m & 2 & m \\ -6 & -14 & m \end{vmatrix} = m^2 - 20m + 36 = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = 18$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 3 & -14 & m \end{vmatrix} = 16m^2 - 2m - 60 = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = -15/8$$

Si $m \neq 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

1. (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
2. (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.
3. (1 punto) Calcular A^{100}.

(Septiembre 2001 - Opción B)
Solución:

1.
$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Luego $A^3 + I = -I + I = O$.

2. $A^3 + I = O \Longrightarrow A \cdot A^2 = -I \Longrightarrow A \cdot (-A^2) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$
$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Tenemos $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I$,... Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego $A^{100} = A^4 = -A$.

Problema 3 Resolver el siguiente sistema
$$\begin{cases} 2X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:
$$\begin{cases} 2X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 13/4 & 2 \\ -1 & 11/4 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:
LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+2c = a \Longrightarrow\ c=0 \\ b+2d = 2a-b \Longrightarrow\ a=b+d \\ -c = c \Longrightarrow\ c=0 \\ -d = 2c-d \Longrightarrow\ c=0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.