SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=m-1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelve el sistema cuando *m*=2.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, que depende del parámetro *m*, discute en función de dicho parámetro y resuelve en los diferentes casos:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=4 \\ mx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\}$$

3. Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente según los valores de *a*:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$$

4. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+my+4z=2 \\ mx+2y+6z=0 \\ 2x+my+6z=m-1 \end{array}\right\}$$

5. Halla para qué valores del parámetro *a* este sistema es incompatible:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x+y+z=a(a+3) \\ x+(a+1)y+z=a^2(a+3) \\ x+y+(a+1)z=a^3(a+3) \end{array}\right\}$$

   ¿Qué valor debe tomar *a* para que sea compatible indeterminado?

6. Discute el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *k*::

$$\left.\begin{array}{r} kx+y-2z=1 \\ -y-3z=k-3 \\ -kx-y+4z=k-1 \\ kx+z=2k+1 \end{array}\right\}$$

7. Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{array}\right\}$$

8. Considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} ax+y+z=3 \\ -3\mathrm{x}+ay-z=-10 \\ 5\mathrm{x}-y+az=13 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro *a*.
b) Resuelve para *a*=2.
c) Resuelve para *a*=3.

9. Alfonso, Luisa y Alba colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en un barrio del centro de la ciudad. Luisa reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Alba reparte 100 hojas más que Alfonso, y entre Luisa y Alfonso colocan 850 hojas en los parabrisas. Averigua cuántas hojas reparten Alfonso, Luisa y Alba.

10. El propietario de una empresa hormigonera enviará a tres de sus conductores para realizar un trabajo en un día en una planta de hormigón: Raúl, Marco y Antonio. Entre Raúl y Marco realizarán 30 viajes a la planta mientras que, entre ellos dos, excederán en 10 viajes a los que realice Antonio. Sabiendo además que entre Raúl y Marco ealizarán el 60% de los viajes:

a) ¿Es posible determinar el número de viajes que realizará cada uno? ¿Cuántos serán?
b) Si además sabemos que Raúl tendrá que trabajar tres días a ese ritmo para hacer el mismo número de viajes que haría Marco en dos días el suyo, ¿cuántos viajes realizará cada uno en la misión?

SOLUCIÓN:

1. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=m-1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & m-1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A|=-2m+2=0 \quad ; \quad m=1$$

- Si $m\neq 1$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ =nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si $m=1$: $r(A^{¿})=3\neq r(A)=2$: El Sistema es INCOMPATIBLE.

   b) Resuelve el sistema cuando *m*=2.

   En el caso en el que *m*=2 el sistema es compatible determinado, y por tanto utilizando el método que nos convenga obtendremos una única solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\}$$

   SOLUCIÓN: x=7/2; y=-1; z=-1/2.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, que depende del parámetro *m*, discute en función de dicho parámetro y resuelve en los diferentes casos:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=4 \\ mx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 4 \\ m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A|=-m^2+4m-3=0 \quad ; \quad m=1 \quad \text{ó} \quad m=3$$

- Si $m\neq 1$ y $m\neq 3$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ =nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si $m=1$: $r(A^{¿})=r(A)=2$ ≠nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

- Si $m=3$: $r(A^{¿})=3\neq r(A)=2$: El Sistema es INCOMPATIBLE.

SOLUCIÓN :

- Caso: $m\neq 1$ y $m\neq 3$ (Sistema Compatible Determinado):

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=4 \\ mx+y+z=4 \\ x+3\mathrm{y}+z=5 \end{array}\right\}$$ Por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{m-1}{-m^2+4\mathrm{m}-3}=\frac{m-1}{-(m-1)(m-3)}=\frac{-1}{m-3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ m & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{m-1}{-m^2+4\mathrm{m}-3}=\frac{m-1}{-(m-1)(m-3)}=\frac{-1}{m-3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-5\mathrm{m}^2+16\mathrm{m}-11}{-m^2+4\mathrm{m}-3}=\frac{(-5\mathrm{m}+11)(m-1)}{-(m-1)(m-3)}=\frac{5\mathrm{m}-11}{m-3}$$

- Caso $m=1$ (Sistema Compatible Indeterminado):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3\mathrm{y}+z=5 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $$\left.\begin{array}{c} x=\dfrac{7-2\lambda}{2} \\ y=1/2 \\ z=\lambda \end{array}\right\}\lambda\in\mathbb{R}$$

- Caso $m=3$ (Sistema Incompatible): Como el sistema es incompatible, no tiene solución.

3. Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente según los valores de *a*:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{\text{¿}}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -a & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

DISCUSIÓN:

$$|A| 7a+63=0 \quad : \quad a=9$$

- Si $a\neq 9$: $r(A^{\text{¿}})=r(A)=3$ = nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si $a=9$: $r(A^{\text{¿}})=r(A)=2$ $\neq$nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

SOLUCIÓN:

- Caso $a\neq 9$: Como el sistema es compatible determinado y además es homogéneo, la única solución posible sera la trivial:
  SOLUCIÓN: x=y=z=0.

- Caso $a=9$: El sistema es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-9y-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: $$\left.\begin{array}{r} x=\dfrac{-6\lambda}{5} \\ y=\dfrac{-7\lambda}{15} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \lambda\in\mathbb{R}$$

4. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+my+4z=2 \\ mx+2y+6z=0 \\ 2x+my+6z=m-1 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 2 & 6 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{\text{¿}}=\begin{pmatrix} 2 & m & 4 & 2 \\ m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 6 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=-2m^2+8=0 \quad : \quad m=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

- Si $m\neq 2$ y $m\neq -2$: $r(A^{\text{¿}})=r(A)=3$ = nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si $m=2$: $r(A^{\text{¿}})=3\neq r(A)=2$: El Sistema es INCOMPATIBLE.

- Si $m=-2$: $r(A^{¿})=r(A)=2$ $\neq$nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

5. Halla para qué valores del parámetro *a* este sistema es incompatible:

$$\left.\begin{array}{l}(a+1)x+y+z=a(a+3)\\ x+(a+1)y+z=a^2(a+3)\\ x+y+(a+1)z=a^3(a+3)\end{array}\right\}$$

¿Qué valor debe tomar *a* para que sea compatible indeterminado?

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1 & a(a+3)\\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3)\\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3)\end{pmatrix}$$

$$|A|=a^3+3a^2=0 \quad : \quad a=0 \quad ó \quad a=-3$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq -3$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ = nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si $a=0$: $r(A^{¿})=r(A)=1$ $\neq$nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

- Si $a=-3$: $r(A^{¿})=r(A)=2$ $\neq$nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

6. Discute el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *k*::

$$\left.\begin{array}{c}kx+y-2z=1\\ -y-3z=k-3\\ -kx-y+4z=k-1\\ kx+z=2k+1\end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix}k & 1 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ -k & -1 & 4\\ k & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}k & 1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & k-3\\ -k & -1 & 4 & k-1\\ k & 0 & 1 & 2k+1\end{pmatrix}$$

$$|A^{¿}|=\begin{vmatrix}k & 1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & k-3\\ -k & -1 & 4 & k-1\\ k & 0 & 1 & 2k+1\end{vmatrix}=-2k^2-6k=0 \quad : \quad k=0 \quad ó \quad k=-3$$

- Si $k\neq 0$ y $k\neq -3$: $r(A^{¿})=4\neq r(A)=3$: El Sistema es INCOMPATIBLE

- Si $k=0$: $r(A^{¿})=3\neq r(A)=2$: El Sistema es INCOMPATIBLE

- Si $k=-3$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ =nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

7. Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} mx+2y+3z=0 \\ 2x+my+2z=2 \\ 2x+my+3z=m-2 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=m^2-4=0 \quad : \quad m=2 \ \text{ ó } \ m=-2$$

Si $m\neq 2$ y $m\neq -2$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $m=2$: $r(A^{¿})=r(A)=2$ $\neq$nº incógnitas: El Sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si $m=-2$: $r(A^{¿})=3\neq r(A)=2$: El sistema es INCOMPATIBLE.

8. Considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} ax+y+z=3 \\ -3x+ay-z=-10 \\ 5x-y+az=13 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro *a*.

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & a & -1 \\ 5 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ -3 & a & -1 & -10 \\ 5 & -1 & a & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=3a^3-3a^2-6a=0 \quad : \quad a=0 \ , \ a=2 \ \text{ ó } \ a=-1$$

- Si $a\neq 0$, $a\neq 2$ y $a\neq -1$: $r(A^{¿})=4\neq r(A)=3$: El Sistema es INCOMPATIBLE.
- Si $a=0$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ = nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $a=2$: $r(A^{¿})=r(A)=3$ = nº incógnitas : El Sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $a=-1$: $r(A^{¿})=3\neq r(A)=2$: El Sistema es INCOMPATIBLE.

b) Resuelve para *a*=2.

En el caso en que $a=2$, el sistema es Compatible Determinado.

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=3 \\ -3x+ay-z=-10 \\ 5x-y+az=13 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$$ Eliminamos una de las ecuaciones para resolver y aplicamos cualquier método para resolver (Gauss, Cramer, …) y obtenemos:

SOLUCIÓN: $x=0$, $y=\frac{-7}{3}$, $z=\frac{16}{3}$

c) Resuelve para *a*=3.

En el caso en que $a=3$, el sistema es incompatible, por tanto no tiene solución.

9. Alfonso, Luisa y Alba colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en un barrio del centro de la ciudad. Luisa reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Alba reparte 100 hojas más que Alfonso, y entre Luisa y Alfonso colocan 850 hojas en los parabrisas. Averigua cuántas hojas reparten Alfonso, Luisa y Alba.

   Alfonso reparte x hojas, Luisa reparte y hojas y Alba reparte z hojas

   Planteamiento:

$$\left.\begin{array}{r} y=0{,}2(x+y+z) \\ z=x+100 \\ y+x=850 \end{array}\right\}$$

   Solución: x=550 hojas Alfonso; y=300 hojas Luisa; z=650 hojas Alba.

10. El propietario de una empresa hormigonera enviará a tres de sus conductores para realizar un trabajo en un día en una planta de hormigón: Raúl, Marco y Antonio. Entre Raúl y Marco realizarán 30 viajes a la planta mientras que, entre ellos dos, excederán en 10 viajes a los que realice Antonio. Sabiendo además que entre Raúl y Marco ealizarán el 60% de los viajes:

    a) ¿Es posible determinar el número de viajes que realizará cada uno? ¿Cuántos serán?
    b) Si además sabemos que Raúl tendrá que trabajar tres días a ese ritmo para hacer el mismo número de viajes que haría Marco en dos días el suyo, ¿cuántos viajes realizará cada uno en la misión?

    a) Planteamiento:

    Raúl hará x viajes, Marco y viajes y Antonio z viajes.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y=z+10 \\ x+y=0{,}6(x+y+z) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 0{,}4x+0{,}4y-0{,}6z=0 \end{array}\right\}$$

    En este sistema $r(A^{¿})=r(A)=2$ $\neq$nº incógnitas, por tanto el sistema es compatible determinado, es decir, no se pueden determinar las incógnitas.

b) Como en el sistema anterior la tercera ecuación es combinación lineal de las otra dos, la eliminamos y añadimos una nueva ecuación con la nueva condición de este apartado:

$$\left.\begin{array}{c} x+y=30 \\ x+y=z+10 \\ 3\mathrm{x}=2\mathrm{y} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3\mathrm{x}-2\mathrm{y}=0 \end{array}\right\}$$

En este caso el sistema es Compatible Determinado con lo cuál tendrá solución única:

SOLUCIÓN: x= 12 viajes Raúl, y= 18 viajes Marco, z= 20 viajes Antonio.