

TEMA 5: GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO.**Vector libre:**

Vector fijo: Un vector fijo de origen A y extremo B, es un segmento caracterizado por:

- Dirección o recta que lo contiene.
- Sentido u orientación de la recta.
- Módulo o longitud del segmento.

Coordenadas de un vector fijo: Llamamos coordenadas de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, de origen $A(a_1, b_1, c_1)$ y extremo $B(a_2, b_2, c_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$$

Módulo de un vector fijo: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$

Vector libre: Los vectores con el mismo módulo, dirección y sentido se dicen vectores equipolentes.

Todos los vectores equipolentes a uno dado definen un vector libre. Escribiremos

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ que será un representante, es decir, el vector libre vendrá representado por cualquier vector fijo del conjunto de vectores equipolentes.

Coordenadas de un vector libre: Serán las coordenadas de cualquiera de los vectores libres que podemos tomar como representante: $\vec{v} = (a, b, c)$

Módulo de un vector libre: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Si el módulo de un vector libre es uno, decimos que es un vector **unitario**.

Operaciones con vectores libres:

Suma de vectores libres:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (a, b, c) \\ \vec{v}' = (a', b', c') \end{array} \right\} \vec{v} + \vec{v}' = (a + a', b + b', c + c')$$

Propiedades:

- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Existencia de elemento neutro: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- Elemento simétrico: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Producto de un número real por un vector:

$$\left. \begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \\ \vec{v} = (a, b, c) \end{array} \right\} t \cdot \vec{v} = (ta, tb, tc)$$

Propiedades:

- Distributiva del producto respecto a la suma de vectores: $t \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = t \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$
- Distributiva de la suma de números reales por un vector: $(t + s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$
- Asociativa mixta: $(t \cdot s) \cdot \vec{v} = t \cdot (s \cdot \vec{v})$
- Elemento neutro: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Con estas propiedades de la suma y el producto por un número real, se puede decir que los vectores libres de $\mathbb{R}^3$ forman un espacio vectorial.

Dependencia e Independencia Lineal de Vectores. Bases:**Vectores linealmente dependientes:**

- Dos vectores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son linealmente dependientes si verifican una de las siguientes condiciones:

- ➔ $\exists t, s \in \mathbb{R} \ t \neq 0, s \neq 0 / t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- ➔ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (están en la misma recta)
- ➔ $r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

- Tres vectores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ son linealmente dependientes si se verifica una de las siguientes condiciones:

- ➔ $\exists t, s, r \in \mathbb{R} / t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w} = \vec{0}$ donde t, s, r son no nulos a la vez
- ➔ $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios
- ➔ $r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} < 3$

Vectores linealmente independientes:

- Dos vectores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son linealmente independientes si verifican una de las siguientes condiciones:

- ➔ $t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow t = s = 0$
- ➔ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección
- ➔ $r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

- Tres vectores $\vec{u}=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}=(a_2, b_2, c_2)$ y $\vec{w}=(a_3, b_3, c_3)$ son linealmente independientes si se verifican una de las siguientes condiciones:

→ $t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow t=s=r=0$ donde t, s, r son no nulos a la vez

→ $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios

→ $r \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 3$

Bases de vectores:

En el espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$, tres vectores linealmente independientes forman una **base** del espacio $\mathbb{R}^3$.

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma:
 $\vec{v} = a \vec{u}_1 + b \vec{u}_2 + c \vec{u}_3$.

Los números a, b y c son las **coordenadas** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Sistemas de referencia:

El sistema de referencia cartesiano en el espacio $\mathbb{R}^3$ es $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y está formado por:

- Un punto fijo que llamamos origen del sistema.
- Una base de vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ unitarios y perpendiculares entre sí, es decir, **ortonormales**.

Coordenadas de un punto: Todo punto P del espacio $\mathbb{R}^3$ tiene asociada tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

Es equivalente a escribir:

$$\vec{OP} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$$

Coordenadas de un vector: Sean A (x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) las coordenadas de los puntos extremos y origen de un vector $\vec{AB}$. Las coordenadas del vector serían:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) .$$

Coordenadas del punto medio de un segmento: Sea el segmento $\overline{AB}$ de extremos A (x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) , y sea M (x, y, z) el punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} ; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ecuaciones de la recta:

Para dar las ecuaciones de una recta necesitaremos un punto de la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector de dirección $\vec{v}=(a, b, c)$ de la misma.

Para cualquier punto P (x, y, z) de la recta tendremos que:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v} \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}$$

Expresado en coordenadas:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c), t \in \mathbb{R}} \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA}$$

Igualando coordenadas tenemos:

$$\boxed{\begin{matrix} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{matrix} t \in \mathbb{R}} \quad \text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA}$$

Eliminando el parámetro t de las anteriores ecuaciones obtenemos:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \quad \text{ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA}$$

Operando dos a dos en las tres razones anteriores obtendríamos la ecuación de la recta como intersección de dos planos:

$$\left. \begin{matrix} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{matrix} \right\} \quad \text{ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA}$$

Ecuaciones del Plano:

Para determinar las ecuaciones de un plano necesitaremos un punto del plano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores direccionales del plano $\vec{u}=(a, b, c)$ y $\vec{v}=(a', b', c')$.

Para cualquier punto P (x, y, z) del plano tendremos que:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad \text{donde } t, s \in \mathbb{R}$$

Expresando en coordenadas:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c) + s \cdot (a', b', c'), t, s \in \mathbb{R}} \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO}$$

Igualando coordenadas tenemos:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot a + s \cdot a' \\ y &= y_0 + t \cdot b + s \cdot b' \\ z &= z_0 + t \cdot c + s \cdot c' \end{aligned} \right\} t, s \in \mathbb{R} \quad \text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO}$$

Sabemos que los vectores $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ son coplanarios (linealmente independientes):

$$r \begin{pmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{pmatrix} = 2, \text{ es decir: } \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante tenemos:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA DEL PLANO}$$

Posiciones Relativas de Dos Planos:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z &= D_1 \\ \pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad A^i = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

- $r(A) = r(A^i) = 2$ Los planos son SECANTES (se cortan en una recta).
- $r(A) = r(A^i) = 2$ Los planos son PARALELOS
- $r(A) = r(A^i) = 1$ Los planos son COINCIDENTES

Posiciones Relativas de Tres Planos:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z &= D_1 \\ \pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z &= D_2 \\ \pi_3: A_3 x + B_3 y + C_3 z &= D_3 \end{aligned} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad A^i = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- $r(A) = r(A^i) = 3$ Los planos son SECANTES (se cortan en un punto)
- $r(A) = 2 \neq r(A^i) = 3$ Los planos se cortan dos a dos
- $r(A) = r(A^i) = 2$ Los planos se cortan en una recta (o dos son coincidentes y el tercero los corta en una recta)
- $r(A) = 1 \neq r(A^i) = 2$ Los planos son PARALELOS
- $r(A) = r(A^i) = 1$ Los planos son COINCIDENTES

Posiciones Relativas de una Recta y un Plano:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \pi: A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad A^{\hat{c}} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- $r(A) = r(A^{\hat{c}}) = 3$ El plano y la recta son SECANTES (se cortan en un punto)
- $r(A) = 2 \neq r(A^{\hat{c}}) = 3$ La recta y el plano son PARALELOS
- $r(A) = r(A^{\hat{c}}) = 2$ La recta está contenida en el plano

Posiciones Relativas de dos Rectas:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = D_4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad A^{\hat{c}} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

- $r(A) = 3 \neq r(A^{\hat{c}}) = 3$ Las rectas se CRUZAN en el espacio
- $r(A) = r(A^{\hat{c}}) = 3$ Las rectas se CORTAN en un punto
- $r(A) = 2 \neq r(A^{\hat{c}}) = 3$ Las rectas son PARALELAS
- $r(A) = r(A^{\hat{c}}) = 2$ Las rectas son COINCIDENTES