

Ejercicios rectas y planos

1. Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$. Determinar: su dirección y dos puntos de la misma.
2. Dada la recta: $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$. Determinar: su vector direccional y dos puntos de la misma.
3. Comprobar si los puntos A(2,3,1), B(5,4,3) y C(2,1,2) están alineados. Sol: No
4. Dados los puntos A(m,2,-3), B(2,6,1) y C(7,1,-4) determinar el valor de m para que estén alineados, y hallar la recta que los contiene. Sol: m=6, $r \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$
5. ¿Qué valores deben tener a y b para que los puntos A(2,2,2), B(1,3,5) y C(1,a,b) estén alineados? Sol: a=3, b=5
6. ¿Qué relación deben verificar los parámetros a, b y c para que los puntos A(1,0,1), B(1,1,0), C(0,1,1) y D(a,b,c) sean coplanarios? Sol: a+b+c-2=0
7. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, escribirla en forma continua. Sol: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$
8. Idem. con la recta: $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ Sol: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$
9. Determinar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A(2,3,5), B(1,1,2) y C(3,6,10). Sol: x-2y+z-1=0
10. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$ Sol: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(3,-1,2) y cuyo vector normal es $\vec{n}(2,1,8)$. Sol: $\pi \equiv 2x + y + 8z - 21 = 0$
12. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,0,1) y contiene a la recta de ecuación:
 $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$ Sol: $\pi \equiv 4x - 3y + 5z - 13 = 0$
13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y es perpendicular al plano x-y-z+2=0. Sol: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$
14. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π , siendo:
 $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ y $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Sol: $\pi_1 \equiv -4x - 3y + z + 8 = 0$
15. Dada la ecuación del plano 2x+y-8z=4. Hallar los puntos de corte con los ejes cartesianos y el área del triángulo que determinan. Sol: A(2,0,0), B(0,4,0), C(0,0,-1/2), área = $\frac{\sqrt{69}}{2} u^2$

- 1.** *Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$; $s \equiv \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x-5y-z-9=0 \end{cases}$
- Estudiar su posición relativa Sol: se cortan (2,-1,0)
 - Determinar la ecuación del plano que las contiene. Sol: $\pi \equiv x-5y-8z-7=0$
- 2.** Ídem. con $r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$, $s \equiv \begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 3x+3y+7z-6=0 \end{cases}$ Sol: coincidentes.
- 3.** *Determinar “a” y “b” para que las rectas sean paralelas:
- $$r \equiv 4x = 2y + 6 = z \quad s \equiv \begin{cases} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases} \quad \text{Sol: } a=1; b=-2$$
- 4.** Hallar los valores de “m” y “n” para que r y s sean paralelas:
- $$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 5\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n} \quad \text{Sol: } m=15, n=-3$$
- 5.** *Determinar “b” para que la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ no corte al plano $\pi \equiv 2x - 4y + 5z = 6$ Sol: b=9
- 6.** Hallar los valores de “a” y “b” para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$ se corten y sean perpendiculares. Sol: a=1, b=1
- 7.** *Hallar los valores de “m” y “n” para que r y s sean paralelas. Hallar también el plano que las contiene. $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$ Sol: m=12, n=-3, $\pi \equiv 5x - 17y + 3z + 26 = 0$
- 8.** Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - ay = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$ probar que no hay ningún valor de “a” para el cuál son paralelas y averiguar el único valor de “a” para el cuál se cortan. Hallar el punto de intersección en ese caso y el plano que las contiene.
Sol: si a=2 se cortan P(5,2,1) $\pi \equiv 5x - 7y - 3z - 8 = 0$, si a≠2 no definida.
- 9.** *Estudiar según los valores del parámetro “a” la posición relativa de las rectas r y s
- $$r \equiv \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad y \quad s \equiv \frac{a-x}{1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1} \quad \text{Sol: } \begin{cases} \text{si } a = -2 \text{ no está definida} \\ \text{si } a = 1 \text{ se cortan} \\ \text{si } a \neq 1 \wedge a \neq -2 \text{ se cruzan} \end{cases}$$
- 10.** Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = k \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + 2kz = 2$, según los valores del parámetro “k”. Sol: • si k = 0 $\Rightarrow r \parallel \pi$ • si k = 1 $\Rightarrow r \subset \pi$ • si k ≠ 0 ∧ k ≠ 1 $\Rightarrow r \times \pi$
- 11.** *Dados los planos $\alpha \equiv ax - 2z = 15$, $\beta \equiv 2x + y + z = -7$, $\gamma \equiv x + y + az = -8a$ determinar los valores de “a” para que los planos pasen por una recta y dar dos puntos y un vector director de ella.
Sol: a = -1, A(-15,23,0), B(1,-1,-8), $\vec{u}(2,-3,-1)$
- 12.** Hallar los valores de “a” para que los planos $\begin{cases} \alpha \equiv -x + y + az = 0 \\ \beta \equiv ax + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ corten al plano $\pi \equiv x - y + z = 1$ en dos rectas perpendiculares. Sol: valores que discriminan a=-1, a=6. No hay sol.

1. Hallar el plano que contiene a $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(-1,0,2)$ Sol: $\pi \equiv 3x - y + 4z - 5 = 0$

2. Hallar el plano π que contiene a r y es paralela a $s: r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

$$s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}$$

$$\text{Sol: } \pi \equiv 5x - 7y + 6z - 9 = 0$$

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(-1,-1,0)$ y es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Sol: } \pi \equiv 14x + 35y - 18z + 49 = 0$$

4. Hallar la ecuación del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 2z - 5 = 0$ que pasa por los puntos $P(1,-2,2)$ y $Q(2,0,-1)$.

$$\text{Sol: } \pi \equiv -16x + 11y + 2z + 34 = 0$$

5. Hallar la ecuación del plano π , que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ es perpendicular al plano

$$\alpha \equiv x - y + 2z + 1 = 0 \text{ y además es paralelo a la recta } r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol: } \pi \equiv 2x - 4y - 3z - 5 = 0$$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,5)$ y es paralela a los planos

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$$

$$\text{Sol: } \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(4,-2,5)$ y es perpendicular a los planos

$$\pi_1 \equiv 2x - 5y - 3z + 1 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 3x + 4y + 3z - 3 = 0$$

$$\text{Sol: } \pi \equiv -3x - 15y + 23z - 133 = 0$$

8. "Recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos que se cruzan".

$$\text{Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + z = -1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + z + 2 = 0 \end{cases}, \text{ hallar la ecuación de la recta "t"}$$

que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas. Hallar los puntos de apoyos R y Q de t con r y s .

$$\text{Sol: } t \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases} \quad R(23/12, -7/6, 1/6); Q(23/11, -14/11, 2/11)$$

9. "Perpendicular común a dos rectas que se crucen".

$$\text{Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

a) Estudiar sus posiciones relativas

b) Hallar la recta perpendicular común a ambas.

c) Hallar los puntos de apoyos P y Q de la perpendicular común a r y s .

$$\text{Sol: } t \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 5x - 16y - 7z - 21 = 0 \end{cases} \quad P(0, 7/15, -61/15), Q(-1/3, 1/3, -4)$$

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1,1,2)$ y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4} \text{ y } s \equiv x+1 = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \text{ y dar los puntos de apoyo.} \quad \text{Sol: } t \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 \end{cases}$$

$$R(-5/4, 1/2, 2), Q(0, 3, 2)$$

11. Hallar la perpendicular común a las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ y los puntos

$$\text{de apoyo.} \quad \text{Sol: } t \equiv \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$$