1 Matrices

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Utilizar las matrices en la representación e interpretación de situaciones que conllevan datos estructurados en forma de tablas o grafos.

B. Realizar sumas y productos de matrices entre sí y por números reales.

C. Realizar operaciones combinadas con matrices.

Resolver ecuaciones matriciales sencillas.

D. Entender el concepto de rango de una matriz y saber calcularlo por el método de Gauss.

E. Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro.

F. Determinar si un conjunto de vectores fila o columna son linealmente dependientes o independientes.

G. Determinar si una matriz cuadrada es o no invertible mediante el cálculo de su rango.

H. Calcular la matriz inversa de una matriz dada a partir de la definición o por el método de Gauss-Jordan.

I. Calcular el transformado de un punto por uno o varios movimientos.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Una factoría fabrica dos modelos de coche, M y N, en tres terminaciones distintas: Berlina, Coupé y Familiar.

Del modelo M produce mensualmente 40 unidades de Berlina, 20 Coupés y 7 en versión Familiar, y del modelo N, 30 Berlinas, 12 Coupés y 7 de la versión Familiar.

La versión Berlina de cada modelo lleva 120 horas de mecánica y 45 de carrocería; la versión Coupé, 110 horas de mecánica y 60 de carrocería, y la versión Familiar, 95 y 55 horas de mecánica y carrocería respectivamente.

a) Representa por medio de matrices la información anterior.

b) Calcula una matriz que exprese las horas de mecánica y carrocería empleadas mensualmente para cada uno de los modelos.

2. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, calcula:

a) AC b) C^tB c) $A^2 - B^2$

3. Calcula una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcula el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & -5 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Calcula, en función de m, el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 4 & m \\ -1 & -m & 1-m \end{pmatrix}$$

6. Dados los vectores de $\mathbf{R}^3$: $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 1, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 2)$, se pide:

a) ¿Cuántos hay linealmente independientes entre ellos? ¿Por qué?

b) ¿El vector $v_4 = (2, 1, 3)$ depende linealmente de $\{v_1, v_2, v_3\}$? ¿Por qué?

7. Razona si las siguientes matrices son invertibles y, en caso afirmativo, halla sus inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Halla el transformado del punto $P(2, 2)$ por los siguientes movimientos consecutivos:

a) Un giro de 270° y centro el origen.

b) A continuación, una traslación de vector guía $(1, -1)$.

c) Por último, una simetría respecto del origen.

1. a) $\begin{array}{c} \\ M \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & C & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad \begin{array}{c} \\ B \\ C \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Me & Ca \end{array} \\ \begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 40 & 20 & 7 \\ 30 & 12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 120 & 45 \\ 110 & 60 \\ 95 & 55 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ M \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} Me & Ca \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7665 & 3385 \\ 5585 & 2455 \end{pmatrix} \end{array}$

2. a) $AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

b) $C^tB = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$XA^2 + BA = A^2 \Rightarrow XI_3 + BA = I_3 \Rightarrow X = I_3 - BA$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & -5 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_1]{\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 \leftrightarrow F_4 \\ F_3 \to F_3 + F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 4 & m \\ -1 & -m & 1-m \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ -1 & -m & 2-m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to 2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ m & 4 & 0 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$$

Si $m = 2$, rg$(A) = 1$, ya que en ese caso los elementos de la primera y de la tercera fila son cero.

Si $m \neq 2$, rg(A) $= 3$, ya que en ese caso la matriz es triangular y tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero.

6. a) El rango de los vectores $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 1, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 2)$ es igual al rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de dicha matriz es 2, ya que la 2.ª y 3.ª filas son proporcionales y la primera y segunda no lo son. Luego hay dos vectores linealmente independientes entre ellos.

b) Para determinar si $v_4 = (2, 1, 3)$ depende linealmente de $\{v_1, v_2, v_3\}$, basta con comprobar si el rango de $\{v_1, v_2, v_4\}$ es 2. Para ello se estudia el rango de la matriz A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de esa matriz es 3, ya que es triangular con todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero. Por tanto, v_4 no depende linealmente de v_1, v_2 y v_3.

7. Para determinar si A y B son invertibles, se calculan sus rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_2 \to C_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es una matriz triangular con elementos no nulos en la diagonal, luego rg$(A) = 3$ y la matriz A es invertible. Se calcula su inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_3 \to -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

En la matriz B se observa que $F_1 = -F_2 + 2F_3$. Por tanto, las filas no son linealmente independientes, luego la matriz no es invertible.

8. a) $(2 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad -2)$

b) $(2 \quad -2) + (1 \quad -1) = (3 \quad -3)$

c) $(3 \quad -3)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-3 \quad 3)$