

### 3 Sistemas de ecuaciones lineales

#### Propuesta A

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

2. En una tienda de animales hay serpientes, lagartos y cacatúas. Entre todos los animales hay el doble de patas que de cabezas, y el número de alas es cuatro veces el número de lagartos. En un descuido se escapan los lagartos, y cada uno se come una cacatúa; no obstante, aunque todos los lagartos comen, sobreviven tres cacatúas. ¿Cuántos animales hay de cada especie? Plantéalo como un sistema matricial y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa.

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a) 
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

4. Discute en función del parámetro  $k$  la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} kx + y + z = 4k \\ x + (k+1)y + kz = k+4 \\ x - y + z = k+1 \end{cases}$$

5. El siguiente sistema de ecuaciones en cierto sentido no es lineal, pero aun así se puede resolver utilizando los métodos habituales, por ejemplo el de Gauss. ¿Para qué valores de  $t$  tiene solución?

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 4t \\ \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \beta - \operatorname{tg} \gamma = 0 \\ 2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve, en función de los parámetros  $a$  y  $b$ , el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{cases}$$

7. Un hotel tiene habitaciones triples (3 camas), dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total hay 11 habitaciones y 30 camas.

¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

## Propuesta B

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ 2x + y + 3z = 10 \\ -3x + y - z = -1 \end{cases}$$

2. El sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones. Halla el valor de  $k$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a) 
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - 2y - z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 4x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

4. Halla el valor de  $a$  para que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga una solución única.

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y = -6 \\ x - 2y + az = \frac{7}{2} \end{cases}$$

5. Halla todos los valores de  $k$  para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de la trivial, es decir,  $(0, 0, 0)$ ; y calcula en función de  $k$  el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ kx + 2y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

7. En un cine los titulares de carnet joven pagan 5,50 € por la entrada, los mayores de 65 años pagan 6,00 €, y el resto de espectadores, 7,50 €.

En una sesión se venden 500 entradas y se recaudan 3600 €.

Sabiendo que a esa sesión acudieron la mitad de jóvenes que de personas mayores de 65 años, ¿cuántos espectadores de cada tipo había?

Soluciones propuesta A

1.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -5y + 4z = 2 \\ y + 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{F_2 + 5F_3} \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 14z = 42 \\ y + 2z = 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 - y + z = -1 \\ y = 8 - 2z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

2. Si  $x = n.$  de serpientes,  $y = n.$  de lagartos y  $z = n.$  de cacatúas, el sistema es:

$$\begin{cases} 4y + 2z = 2(x + y + z) \\ 2z = 4y \\ -y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } |A| = 1 \neq 0:$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Luego hay 3 serpientes, 3 lagartos y 6 cacatúas (al comienzo del problema; al final, solo quedan 3).

3. a)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ . No es de Cramer.

b) La matriz es cuadrada y regular:  $|A| = 13 \neq 0$

$$x = \frac{A_x}{13} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{13} = 3, \quad y = \frac{A_y}{13} = 1, \quad z = \frac{A_z}{13} = 1$$

4.  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

Si  $k \neq 1$  y  $k \neq -\frac{3}{2}$ ,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$  S. C. D.

Si  $k = 1$ , S. C. I., porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Si  $k = -\frac{3}{2}$ , S. I., porque  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$  y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

5. Se realiza el cambio de variable  $x = \text{sen } \alpha$ ,  $y = \text{cos } \beta$ ,  $z = \text{tg } \gamma$ , y el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 4t \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

cuya solución es  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$

Para que el sistema tenga solución al deshacer el cambio, debe ser:

$$\begin{cases} -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 2t \leq 1 \\ -1 \leq 3t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

Si  $a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$  S. C. D.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left( \frac{b(a+5)}{a-4}, -b, \frac{-9b}{a-4} \right)$$

Si  $a = 4$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -9b$$

$\begin{cases} \text{Si } b \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$  S. I.

$\begin{cases} \text{Si } b = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow$  S. C. I.,  $(x, y, z) = (-\lambda, 0, \lambda)$

7. Si  $x = n.$  de habitaciones triples,  $y = n.$  de habitaciones dobles y  $z = n.$  de habitaciones sencillas, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + z = 30 \end{cases}, \text{ que es un sistema compatible}$$

indeterminado.

Sus soluciones son  $(x, y, z) = (\lambda + 8, -2\lambda + 3, \lambda)$ .

Dado que el hotel tiene habitaciones de los tres tipos,  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ . De la segunda inecuación,  $-2\lambda + 3 > 0$ , se deduce que  $\lambda = 1$ .

Luego la solución es  $(x, y, z) = (9, 1, 1)$ : hay 9 habitaciones triples, 1 doble y 1 sencilla.

## Soluciones propuesta B

$$1. \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=10 \\ -3x+y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1}} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ -5y-4z=-16 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5+2y+z=-1 \\ y=4-z=0 \\ z=4 \end{cases}$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Para que sea S. C. I. debe ser  $\text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k - 25 = 0 \Rightarrow k = 5$$

3. a) Es de Cramer: la matriz de coeficientes es cuadrada y regular,  $|A| = 19 \neq 0$ .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{38}{19} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

- b) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es regular,  $|A| = 0$ .

- c) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es cuadrada (es  $4 \times 3$ ).

4. Para que sea S. C. I. debe cumplirse que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n.$  de incógnitas = 3, es decir,

$$|A| = 0 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 14a - 14 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2. \text{ Luego } a = 1$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - k + 2 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Si  $k \neq 1$  y  $k \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  S. C. D. Al ser homogéneo,  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

Si  $k = 1$ , coinciden la primera y tercera ecuaciones, luego es S. C. I.:

$$\begin{cases} x-y=-z \\ x+2y=4z \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left( \frac{2\lambda}{3}, \frac{5\lambda}{3}, \lambda \right)$$

Si  $k = -2$ , la segunda ecuación es  $-2$  veces la primera, luego es S. C. I.:

$$\begin{cases} x-y=2z \\ x-y=-z \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0)$$

$$6. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n.$  de incógnitas = 3  $\Rightarrow$  S. C. D.

$$(x, y, z) = \left( \frac{-a}{a+2}, \frac{-a}{a+2}, \frac{a^2+2a+2}{a+2} \right)$$

Si  $a = 1$ , las tres ecuaciones coinciden:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$$

Si  $a = 2$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2,$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{S. I.}$$

7. Si  $x = n.$  de jóvenes,  $y = n.$  de mayores de 65 años y  $z = n.$  de espectadores que no son de los anteriores, el sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 5,5x+6y+7,5z=3600 \\ y=2x \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{Sust. } F_3 \text{ en } F_1 \text{ y } F_2 \\ 2F_2}} \begin{cases} x+y+z=500 \\ 5,5x+6y+7,5z=3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+z=500 \\ 35x+15z=7200 \end{cases} \xrightarrow{15F_1-F_2} 10x=300 \rightarrow x=30$$

La solución es  $(x, y, z) = (30, 60, 410)$ , es decir, había 30 jóvenes, 60 mayores de 65 años y 410 espectadores distintos de los anteriores.