

7

Lugares geométricos en el espacio

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Escribir las ecuaciones paramétricas de cualquier cónica en el plano.

B. Expresar la ecuación de una cónica en forma implícita cuando se conoce su ecuación paramétrica, y viceversa.

C. Calcular puntos y hallar la ecuación en forma implícita de curvas y superficies en el espacio, dadas mediante sus ecuaciones paramétricas.

D. Determinar la ecuación de cuádricas sencillas (elipsoide, paraboloides, hiperboloides).

E. Hallar la ecuación de la superficie esférica conociendo: centro y radio, extremos de un diámetro, centro y recta o plano tangente, cuatro puntos no coplanarios.

F. Identificar una superficie esférica, su centro y radio a partir su ecuación en cualquiera de sus formas.

G. Resolver problemas de incidencia, tangencia, intersección y posición relativa con superficies esféricas.

H. Calcular las ecuaciones de superficies cónicas, cilíndricas, de traslación, de revolución y cuádricas en las coordenadas apropiadas en cada caso

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(2, -3)$ y radio $r = 5$. Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro en las ecuaciones paramétricas $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$

2. Escribe las ecuaciones paramétricas e implícita de la elipse de focos $F(-1, -1)$ y $F'(-1, 3)$ y eje mayor $2a = 6$.

3. Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\sqrt{1 + \sin^2 t} \\ y = 2\sin t \end{cases}$ corresponden a una parte de la cónica de ecuación $\begin{cases} x = 2\sqrt{1 + k^2} \\ y = 2k \end{cases}$. Escribe la ecuación implícita de la cónica, identifica de qué cónica se trata y efectúa la representación gráfica correspondiente a la parte que definen las primeras ecuaciones paramétricas.

4. Identifica la superficie que definen las ecuaciones paramétricas siguientes e indica un punto de cada una:

$$S_1: \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t + s \\ z = 3t - s \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - 4s \end{cases}, \quad S_3: \begin{cases} x = 5 \cos \alpha \sin \beta \\ y = 5 \cos \alpha \cos \beta \\ z = 3 + 5 \sin \alpha \end{cases}$$

5. Halla las ecuaciones implícitas de la curva $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t^2 \\ z = 2t \end{cases}$ y determina tres de sus puntos.

6. Determina los ejes y los vértices del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$. ¿Qué curva se obtiene al cortar el elipsoide por el plano $x = 0$? ¿Y si es cortado por el plano $z = 0$?

7. Los puntos $A(7, -2, 5)$ y $B(-1, -4, 1)$ son los extremos de un diámetro de una superficie esférica. Escribe sus ecuaciones paramétricas e implícita.

8. Una superficie esférica pasa por los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$ y $D(4, 4, 4)$. Calcula su ecuación implícita y determina su centro y su radio.

9. Escribe la ecuación de la superficie esférica de centro $C(1, 0, -1)$ tangente a la recta $r: (1 + \lambda, 2\lambda, 5 - 2\lambda)$.

10. Se considera la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$, determina: su centro, su radio, sus ecuaciones paramétricas y el volumen de la esfera que delimita.

11. Dado el plano de ecuación $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$, y el punto $C(5, 0, 1)$, determina:

- La ecuación de la superficie esférica de centro C y tangente al plano.
- La ecuación de otro plano distinto y paralelo a π que también sea tangente a la superficie esférica.

12. Calcula las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtienen al girar la curva $C: \begin{cases} x = y^2 \\ y = z \end{cases}$, alrededor del eje Z .

Soluciones

1.
$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t \\ y = -3 + 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Puntos: $P_1(7, -3)$, $P_2\left(\frac{4 - 5\sqrt{2}}{2}, \frac{-6 + 5\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_3(-3, -3)$,

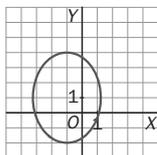
$P_4(2, -8)$ y $P_5\left(\frac{9}{2}, \frac{-6 - 5\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Centro $C(-1, 1)$.

Semiejes: $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

Ec. implícita: $\frac{(x + 1)^2}{5} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$

Ecs. paramétricas:
$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5} \operatorname{sent} \\ y = 1 + 3 \operatorname{cost} \end{cases}$$



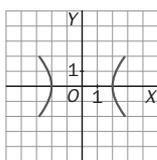
3.
$$\begin{cases} x^2 = 4 + 4k^2 \\ y^2 = 4k^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$
. Se trata

de una hipérbola equilátera centrada en el origen. Como $-1 \leq \operatorname{sent} t \leq 1$ y

$-1 \leq \operatorname{cost} t \leq 1$, resulta que

$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ y que

$-2 \leq y \leq 2$.



4. S_1 corresponde al plano de ecuación implícita $4x - 5y + 3z - 33 = 0$.

S_2 es una recta, ya que con el cambio $k = 5 - 2s$ se

tiene S_2 :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -5 + k, \text{ es decir, } \begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + z = 7 \end{cases} \\ z = 3 + 2k \end{cases}$$

S_3 es una superficie esférica de centro $C(0, 0, 3)$, radio 5 y ecuación implícita $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$. Para hallar un punto de cada una, se igualan a 0 los parámetros: $P_1(2, -5, 0)$, $P_2(2, -5, 3)$ y $P_3(0, 5, 3)$.

5. Se despeja $t = x + 2$ y se sustituye:

$$\begin{cases} y = (x + 2)^2 \\ z = 2(x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - y + 4 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Tomando $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ se obtienen:

$A(-2, 0, 0)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(0, 4, 4)$.

6. $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{4} = 1$. Ejes: $2a = 8$, $2b = 8$, $2c = 4$.

Vértices: $A(4, 0, 0)$, $A'(-4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $B'(0, -4, 0)$, $C(0, 0, 2)$ y $C'(0, 0, -2)$.

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$, elipse de ejes $2b = 8$, $2c = 4$.

Si $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, circunferencia de radio 4.

7. Centro: $C\left(\frac{7-1}{2}, \frac{-2-4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (3, -3, 3)$

Radio: $r = |\overline{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

Ecuación implícita: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 21$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{21} \cos \alpha \cos \beta \\ y = -3 + \sqrt{21} \cos \alpha \sin \beta \\ z = 3 + \sqrt{21} \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

8. $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Sustituyendo los puntos se obtiene:

$$\begin{cases} 2C + D = -4 \\ 2B + D = -4 \\ 2A + D = -4 \\ 4A + 4B + 4C + D = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -22/5 \\ B = -22/5 \\ C = -22/5 \\ D = 24/5 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{22}{5}x - \frac{22}{5}y - \frac{2}{5}z + \frac{24}{5} = 0$.

Centro $M\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$, radio $r = \sqrt{3\left(\frac{11}{5}\right)^2 - \frac{24}{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{3}$.

9. $R = d(C, r) = \frac{|\vec{u} \times \overline{AC}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$

Ecuación: $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 20$

10. Centro $C(2, -3, -1)$, radio 4, volumen $\frac{256}{3}\pi$.

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 + 4 \cos \alpha \cos \beta \\ y = -3 + 4 \cos \alpha \sin \beta \\ z = -1 + 4 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

11. Radio $R = d(C, \pi) = \frac{|10 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4$

a) $(x - 5)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$

b) El plano buscado es

$d(C, \sigma) = R \Rightarrow \frac{|10 - 1 + D|}{3} = 4 \Rightarrow |9 + D| = 12 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 3 \\ D_2 = -21 \end{cases}$

Luego $\sigma : 2x - 2y - z - 21 = 0$

12. La curva es $C : \{t^2, t, t\}$, luego las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución son:

$$\begin{cases} x = t^2 \cos s - t \operatorname{sen} s \\ y = t^2 \operatorname{sen} s + t \cos s \\ z = t \end{cases}$$