

7 Lugares geométricos en el espacio

Propuesta A

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{sen} t \\ y = 2 + 4 \operatorname{cos} t \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{cos} t \\ y = 2 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$

- a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.
 b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.
 c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(1, 5)$ y radio $r = 5$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la elipse de focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ y eje mayor $2a = 10$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

4. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 11 = 0$ es tangente a un plano de ecuación $2x + y - 2z + m = 0$. Halla:

- a) El centro, radio y el área de la superficie esférica.
 b) El valor o valores de m .
 c) Las coordenadas del punto o de los puntos de tangencia.

5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$		
	$Q(2, 30^\circ, -2)$	
		$T(5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. Escribe en coordenadas cartesianas y en polares las ecuaciones de las siguientes curvas.

- a) Circunferencia de centro $C(2, 1)$ y radio $r = 2$.
 b) Elipse de centro el origen y semiejes $a = 5$ y $b = 3$.
 c) Hipérbola de centro $C(0, 0)$, eje real $a = 2$ y excentricidad $e = 2$.
 d) Parábola de vértice el origen y foco $F(0, 3)$.

7. Escribe las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica formada por todas las rectas que pasan por el vértice $V(-1, 0, 2)$ y se apoyan en la directriz $C: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \operatorname{cos} t \end{cases}$.

8. La curva $B: \begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \\ y = 0 \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$, con $a \neq 0$, se llama "Bruja de Agnesi" y está contenida en el plano XZ . Halla las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución engendrada por la Bruja cuando gira en torno al eje Z .

Propuesta B

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

$$I) \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad II) \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

- a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.
 b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.
 c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(-4, 0)$ y radio $r = 4$. Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{4\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la hipérbola de focos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y eje mayor $2a = 6$.

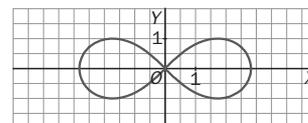
Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{3}$, y represéntalos.

4. Se define la lemniscata de Bernoulli como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos, los focos, tienen un producto constante e igual a c^2 , siendo c la semidistancia focal.

a) Halla su ecuación en coordenadas cartesianas suponiendo que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

b) Halla su ecuación en coordenadas polares.

c) Si la semidistancia focal es $c = 2$, demuestra que los vértices horizontales son los puntos $A'(-2\sqrt{2}, 0)$ y $A(2\sqrt{2}, 0)$.



5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$		
	$Q(4, 180^\circ, 4)$	
		$T(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

6. Halla la ecuación implícita de la superficie cilíndrica de directriz la curva $C: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 2 \end{cases}$ y de generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (-1, 0, -1)$.

7. Escribe la ecuación de la superficie formada por todos los puntos pertenecientes a las rectas que se apoyan en el eje Z y en la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 12 + 3t \\ z = t \end{cases}$ y cuya dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

8. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + d = 0$ tiene un área de 36π unidades cuadradas. Halla:

- a) El radio de la misma y el valor del término independiente d .
 b) La ecuación de otra superficie esférica concéntrica con esta y tangente al plano $\pi: x - 2y + 2z = 0$.
 c) Los puntos de corte de la superficie esférica con los ejes de coordenadas.

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{sen} t \\ y = 2 + 4 \operatorname{cos} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t = \frac{x-3}{4} \\ \operatorname{cos} t = \frac{y-2}{4} \end{cases}$

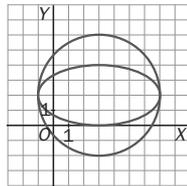
Como $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = 1$,

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$\begin{cases} x = 3 + 4 \operatorname{cos} t \\ y = 2 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} t = \frac{x-3}{4} \\ \operatorname{sen} t = \frac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

b) Se trata de una circunferencia de centro $C(3, 2)$ y radio 4, y de una elipse con el mismo centro y semiejes $a = 4$ y $b = 2$.



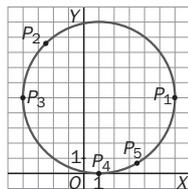
c) Los puntos comunes se obtienen al igualar las ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = \operatorname{cos} \lambda \\ 2 \operatorname{cos} t = \operatorname{sen} \lambda \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \operatorname{cos}^2 t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(7, 2) \\ B(-1, 2) \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x = 1 + 5 \operatorname{cos} t \\ y = 5 + 5 \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

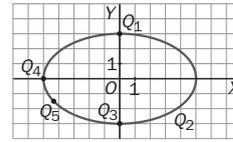
t	P_i
0	(6, 5)
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{2-5\sqrt{2}}{2}, \frac{10+5\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(-4, 5)
$\frac{3\pi}{2}$	(1, 0)
$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{7}{2}, \frac{10-5\sqrt{3}}{2}\right)$



3. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} t \\ y = 3 \operatorname{cos} t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

t	Q_i
0	(0, 3)
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(0, -3)

$\frac{3\pi}{2}$	(-5, 0)
$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}\right)$



4. a) Centro: $C(3, 2, -1)$.
Radio: $r = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-11)} = \sqrt{25} = 5$

b) $d(C, \pi) = r \Rightarrow \frac{|6+2+2+m|}{3} = 5 \Rightarrow |10+m| = 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m_1 = 5, m_2 = -25$.

c) Los puntos de tangencia son intersección entre la recta perpendicular al plano que pasa por C y el plano. Sus ecuaciones son:
 $\{x = 3 + 2\lambda, y = 2 + \lambda, z = -1 - 2\lambda\}$
Sustituyendo en la ecuación del plano π y dando a m los valores obtenidos en b:

$$m_1 = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$m_2 = -25 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow A\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$	$P\left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$	$P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
$Q(\sqrt{3}, 1, -2)$	$Q(2, 30^\circ, -2)$	$Q\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$
$T\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$T(5, 60^\circ, 0)$	$T(5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad r = 2$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad r = \frac{15}{\sqrt{9+16\operatorname{sen}^2 \theta}}$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad r = \sqrt{\frac{12}{3-4\operatorname{sen}^2 \theta}}$

d) $x^2 = 12y \quad r = \frac{12 \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$

7. La ecuación vectorial de la superficie es $\vec{x} - \vec{a} = s(\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{c} - \vec{a})$ y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + s(2t + 1) \\ y = 0 + s(2 \operatorname{sen} t) \\ z = 2 + s(2 \operatorname{cos} t - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + s + 2st \\ y = 2s \cdot \operatorname{sen} t \\ z = 2 - 2s + 2s \cdot \operatorname{cos} t \end{cases}$$

8. Las ecuaciones de la superficie pedida son:

$$\begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cos} s - 0 \cdot \operatorname{sen} s \\ y = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{sen} s + 0 \cdot \operatorname{cos} s \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cos} s \\ y = 2a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{sen} s \\ z = 2a \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

donde s es el ángulo de giro.

Soluciones propuesta B

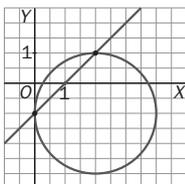
1. a) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x - 3 = y - 2 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x-2}{2} \\ \sin t = \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

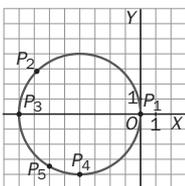
b) Se trata de una recta y de una circunferencia.

c) Para hallar los puntos de corte se resuelve el sistema: $P_1(2, 1)$ y $P_2(0, -1)$



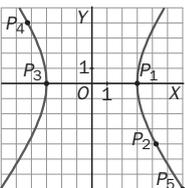
2. $\begin{cases} x = -4 + 4 \cos t \\ y = 0 + 4 \sin t \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 16$

t	P_i
0	(0, 0)
$-\frac{3\pi}{4}$	$(-4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
π	(-8, 0)
$\frac{3\pi}{2}$	(-4, -4)
$\frac{4\pi}{3}$	$(-6, -2\sqrt{3})$



3. $\begin{cases} x = 3 \sec t \\ y = 4 \tan t \end{cases} \Rightarrow \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

t	Q_i
0	(3, 0)
$\frac{3\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, -4)$
π	(-3, 0)
$-\frac{3\pi}{4}$	$(-3\sqrt{2}, 4)$
$\frac{5\pi}{3}$	$(6, -4\sqrt{3})$



4. a) Tomando un punto genérico $P(x, y)$ de la curva, se tiene que $d(P, F) = d(P, F') \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$

b) $r^2 = 2c^2 \cos^2 \theta$

c) Haciendo $y = 0$ se obtienen tres soluciones:
 $x = 0, x = \pm c\sqrt{2} \Rightarrow$ Vértices: $(\mp c\sqrt{2}, 0)$.

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a: $(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$	$P(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3)$	$P(\sqrt{21}; \frac{\pi}{6}; 0,857)$
$Q(-4, 0, 4)$	$Q(4, 180^\circ, 4)$	$Q(4\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{4})$
$T(0, -3, -3)$	$T(3, 270^\circ, -3)$	$T(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

6. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - s \\ y = 2 \sin t \\ z = 2 - s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x+s}{2} \\ \sin t = \frac{y}{2} \\ s = 2 - z \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x+2-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

7. Se toma un punto genérico A del eje Z y otro B de la recta r .

$A(0, 0, s), B(4 + t, 12 + 3t, t)$

Para que el vector \overline{AB} sea perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$:

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow t - s = 0 \Rightarrow t = s$$

La superficie está formada por las rectas que pasan por $A(0, 0, t)$ y $B(4 + t, 12 + 3t, t)$:

$$s: \begin{cases} x = s(4 + t) \\ y = s(12 + 3t) \\ z = t \end{cases} \text{ Eliminando los parámetros:}$$

$$s = \frac{x}{4+t} = \frac{y}{12+3t}; \quad t = z \Rightarrow \frac{x}{4+z} = \frac{y}{12+3z} \Rightarrow 12x - 4y + 3xz - yz = 0$$

8. a) $S = 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 3$

Centro: $C(1, 0, -3)$ y $d = 1^2 + (-3)^2 - 3^2 = 1$

b) $r_2 = d(C, \pi) = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3}$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{9}$$

c) Eje $X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad x^2 - 2x + 9 = 0$

Sin solución real.

Eje $Y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0, 1, 0) \\ B(0, 9, 0) \end{cases}$

Eje $Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad z^2 + 6z + 9 = 0 \Rightarrow z = -3 \Rightarrow C(0, 0, -3)$