

Vectores en el espacio

A. Expresar un vector como combinación lineal de otros vectores dados.

B. Determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores.

C. Multiplicar escalarmente dos vectores tanto en la forma geométrica como en la analítica.

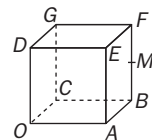
D. Determinar condiciones de ortogonalidad de dos vectores dependientes de un parámetro.

E. Saber hallar el ángulo de dos vectores y determinar vectores ortogonales a uno dado.

F. Calcular correctamente productos vectoriales y productos mixtos con unos vectores conocidos.

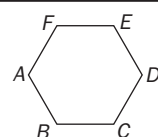
G. Aplicar el producto vectorial para determinar una dirección ortogonal al plano vectorial V^2 determinado por dos vectores.

- En el cubo de la figura, M es el punto medio de $\overrightarrow{BF}$. Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$.
- El vector $\vec{a} = (-2, -11, 1)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (2, -3, 5)$ y $\vec{c} = (4, 1, k)$. ¿Cuál es el valor de k ?



- Sabiendo que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, justifica que los vectores $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{w} - \vec{u}$ son linealmente dependientes y que los vectores $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{w} + \vec{u}$ son linealmente independientes.
- ¿Para qué valores del parámetro k los vectores $(1, k, 1)$, $(k, 1, 1)$ y $(1, 1, k)$ son linealmente dependientes?

- El lado del hexágono regular de la figura mide $\sqrt{3}$. Calcula los productos escalares $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CF}$.



- Si $\vec{x} \cdot \vec{x} = 2$, $\vec{x} \cdot \vec{y} = -1$ y $\vec{y} \cdot \vec{y} = 3$, y se tienen los vectores $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{b} = 3\vec{x} - \vec{y}$, calcula: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $|\vec{b}|$ y el coseno del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

- Halla dos vectores ortogonales a $\vec{x} = (-1, -2, 4)$ y a $\vec{y} = (1, 1, -2)$ de módulo $\sqrt{20}$.
- Se consideran los vectores $\vec{u} = (-2k, k, 5)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Calcula el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

- Halla tres vectores unitarios, ortogonales al vector $\vec{a} = (-3, 5, 1)$, de modo que los tres tengan distinta dirección. Comprueba que son linealmente dependientes.
- Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 5, 1)$, $\vec{b} = (2, -3, 5)$ y $\vec{c} = (4, 1, 1)$, calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores: $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{c}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{c} - \vec{a}$.

- Dados los vectores $\vec{x} = (-4, 3, 0)$, $\vec{y} = (1, -3, 3)$, $\vec{z} = (5, -2, -1)$, halla: a) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ b) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ c) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ d) $|(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}|$ e) $|\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})|$
- Demuestra que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \times (-2\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$.
- El producto mixto de los vectores $\vec{x} = (-1, 0, 3)$, $\vec{y} = (-2, -3, 1)$, y $\vec{z} = (k, 2, -1)$ es 2009. ¿Cuál es el valor de k ?

- Con los vectores $\vec{u} = (1, 1, -2)$ y $\vec{v} = (2, -1, 0)$ se determina un espacio vectorial de dimensión 2 (plano vectorial V^2). Calcula un vector $\vec{w}$ que sea base de un espacio vectorial de dimensión 1 (recta vectorial V^1) de manera que los espacios V^2 y V^1 sean ortogonales. Demuestra que el vector $\vec{w}$ hallado es ortogonal a todos los vectores $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
- Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -4, 3)$, y $\vec{w} = (10, 7, 6)$. V^2 es el espacio vectorial de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. V^1 es el espacio vectorial de base $\{\vec{w}\}$. Comprueba que todos los vectores de V^2 son ortogonales a los de V^1 . Demuestra que los espacios vectoriales $V^2 = \{\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}$ y $V^1 = \{\vec{y} = \lambda\vec{w}\}$ son ortogonales.

Soluciones

$$1. \vec{AF} = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{BF} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$$

$$\vec{GE} = \vec{GF} + \vec{FD} + \vec{DE} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{a} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{FO} = \vec{FB} + \vec{BO} = -\vec{d} - \vec{b}$$

$$\vec{DM} = \vec{DF} + \frac{1}{2}\vec{FB} = \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{d}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$2. x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ -3x + y = -11 \\ 5x + ky = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ k = 7 \end{cases}$$

3. a) $1(\vec{u} - \vec{v}) + 1(\vec{v} - \vec{w}) + 1(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{0}$, luego los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $\alpha(\vec{u} - \vec{v}) + \beta(\vec{v} - \vec{w}) + \gamma(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow$

$(\alpha + \gamma)\vec{u} + (\beta - \alpha)\vec{v} + (\gamma - \beta)\vec{w} = \vec{0}$. Como $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, se tiene que

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 0, \text{ cuya \u00fanica soluci\u00f3n es la trivial, } \alpha = 0, \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases}$$

$\beta = 0, \gamma = 0$; luego los tres vectores pedidos son linealmente independientes.

$$4. \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3k - k^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow -(k-1)^2(k+2) = 0$$

Se anula si $k = 1$ o $k = -2$. Para estos valores de k , los vectores son linealmente dependientes.

5. La longitud de la diagonal AC es igual al doble de la apotema, es decir, $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ y la longitud de la diagonal EB es el doble del lado, $2\sqrt{3}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ = \frac{9}{2}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{EB} \cdot \vec{CF} = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ = -6$$

$$6. \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{x} + 2\vec{y}) \cdot (3\vec{x} - \vec{y}) = 3(\vec{x} \cdot \vec{x}) + 5(\vec{x} \cdot \vec{y}) - 2(\vec{y} \cdot \vec{y}) =$$

$$= 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{x} + 2\vec{y}) \cdot (\vec{x} + 2\vec{y}) = (\vec{x} \cdot \vec{x}) + 4(\vec{x} \cdot \vec{y}) + 4(\vec{y} \cdot \vec{y}) =$$

$$= 2 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 10$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = (3\vec{x} - \vec{y}) \cdot (3\vec{x} - \vec{y}) = 9(\vec{x} \cdot \vec{x}) - 6(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) =$$

$$= 9 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) + 3 = 27 \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{10} \sqrt{27}} = -\frac{\sqrt{30}}{18}$$

7. $\vec{x} \times \vec{y} = (0, 2, 1)$ Se normaliza y se multiplica por el m\u00f3dulo deseado.

$$\pm \frac{\vec{x} \times \vec{y}}{|\vec{x} \times \vec{y}|} \sqrt{20} = \pm \left(0, \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \right) = \pm (0, 4, 2)$$

$$8. \vec{u} + 2\vec{v} = (-2k + 2, k + 2, 3)$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2k + 2 + k + 2 - 3 = 0 \Rightarrow k = 1$$

9. Se hallan tres vectores cualesquiera ortogonales al vector $\vec{a}$ y se normalizan. Por ejemplo:

$$\vec{x} = (5, 3, 0), \vec{y} = (1, 0, 3), \vec{z} = (0, 1, -5)$$

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}, 0 \right), \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}} \right) \text{ Basta comprobar que } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ son}$$

$$\text{linealmente dependientes: } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 0$$

$$10. \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-16}{\sqrt{35} \sqrt{38}} \Rightarrow \alpha \approx 116^\circ 1'$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{-6}{\sqrt{35} \sqrt{18}} \Rightarrow \beta \approx 103^\circ 50'$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{10}{\sqrt{38} \sqrt{18}} \Rightarrow \gamma \approx 67^\circ 31'$$

$$\cos \phi = \frac{(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{c} - \vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{-15}{\sqrt{65} \sqrt{41}} \Rightarrow \phi \approx 106^\circ 54'$$

$$11. (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (6, 54, -78)$$

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (39, 52, -91)$$

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 12$$

$$|(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}| = \sqrt{6^2 + 54^2 + (-78)^2} = \sqrt{9036}$$

$$|\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})| = \sqrt{39^2 + 52^2 + (-91)^2} = \sqrt{12506}$$

$$12. (\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} \times \vec{u}) - (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{u}) - (\vec{v} \times \vec{v}) =$$

$$= \vec{0} - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{0} = -2(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (-2\vec{v})$$

$$13. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2009 \Rightarrow 9k - 13 = 2009 \Rightarrow k = \frac{674}{3}$$

$$14. \vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} = (2, 4, 3)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{w} \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda(\vec{w} \cdot \vec{u}) + \mu(\vec{w} \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

luego es ortogonal a todos ellos.

15. Para comprobarlo se toma un vector cualquiera de V^2 , por ejemplo $\vec{u} + 2\vec{v} = (0, -6, 7)$ y se multiplica escalarmente por otro vector de V^1 , por ejemplo, $-3\vec{w} = (-30, -21, -18)$.

$$(0, -6, 7) \cdot (-30, -21, -18) = 0 + 126 - 126 = 0$$

Para demostrarlo, se toma el caso general:

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \alpha \vec{w} = \lambda \alpha (\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu \alpha (\vec{v} \cdot \vec{w}) =$$

$$= (\lambda \alpha) \cdot 0 + (\mu \alpha) \cdot 0 = 0$$