

5 Planos y rectas en el espacio

Propuesta A

- En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene como origen el punto A y por extremo el punto B.
a) A(2, 3, -1) y B(4, 5, 2)
b) A(-1, 2, 0) y B(4, -3, -2)
- Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos A(2, 3, -2) y B(-4, 3, -2).
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:
a) Pasa por el punto A(-1, 3, -2) y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.
b) Pasa por los puntos A(-1, 2, 4) y B(-3, 4, -7).
c) Pasa por el punto A(-3, 4, 0) y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.
- Dado el segmento de extremos A(1, 2, -3) y B(-4, 12, 2), calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que la distancia que lo separa de A sea $\frac{2}{5}$ de la longitud del segmento AB.
- Se considera la recta de ecuación implícita $r : \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Determina:
a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.
- Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:
a) Pasa por el punto A(4, 0, -1) y tiene como vectores directores $\vec{u} = (0, -2, 3)$ y $\vec{v} = (5, -1, 2)$.
b) Pasa por los puntos A(3, -2, 1), B(0, 0, -2) y C(1, 1, 1).
c) Pasa por el punto A(-3, 4, 0) y contiene a la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$.
- Decide en cada uno de los siguientes casos si los puntos A, B y C están alineados o forman un triángulo:
a) A(1, 3, -1), B(-1, 4, -3) y C(3, 2, 1)
b) A(1, 2, -2), B(2, 0, 1) y C(0, 4, -4)
- Calcula la ecuación del plano simétrico de $\pi : x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de P(-2, 1, 0).
- Calcula m para que A(-1, m - 1, 0), B(0, m + 2, 1) y C(1, 5, 2) pertenezcan a una recta. ¿Cuál es su ecuación?
- Tres aristas concurrentes en el vértice A(2, 0, 0) de un paralelepípedo son AB, AC y AD. Sabiendo que B(5, 0, 1), C(3, 1, -3) y D(1, 10, 3), determina:
a) Los otros cuatro vértices. b) El volumen del paralelepípedo. c) Comprueba que es un ortoedro.
- Estudia la posición relativa de los planos:
 $\pi_1 : ax - y + z = 0$
 $\pi_2 : x + ay = 0$
 $\pi_3 : 2x + az = 0$

Propuesta B

1. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q .
 b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R .

2. El punto $M(-6, 5, 1)$ es el punto medio del segmento AB . Halla el punto A si el punto B es $(10, -7, 0)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:
 - a) Pasa por el punto $A(6, -1, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, 1, 0)$.
 - b) Pasa por los puntos $A(5, 2, -1)$ y $B(5, 4, -1)$.
 - c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y es paralela a la recta $s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{1}$.

4. Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P , Q y R que dividan al segmento en cuatro partes iguales.

5. Se define la recta r como intersección de los planos $\pi: 2x - 3y + z = 3$ y $\sigma: x - z = 6$. Determina de r :
 - a) Un punto y el vector director.
 - b) La ecuación en forma paramétrica.
 - c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:
 - a) Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.
 - b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.
 - c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y uno de sus vectores normales es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = z$.

8. a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.
 b) Halla la ecuación en forma paramétrica de la recta simétrica de $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Un cubo tiene un vértice en el punto $A(1, 1, 1)$ y el centro en el punto $C(2, 2, 2)$.
 ¿Cuál es su volumen?

10. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1: 3x - y + 2z &= 1 \\ \pi_2: x + 4y + z &= b \\ \pi_3: 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned}$$

Soluciones propuesta A

1. a) $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, 5, 2) - (2, 3, -1) = (2, 2, 3)$

b) $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, -3, -2) - (-1, 2, 0) = (5, -5, -2)$

2. $M\left(\frac{1}{2}(2-4), \frac{1}{2}(3+3), \frac{1}{2}(-2-2)\right) = M(-1, 3, -2)$

3. a) $\begin{cases} x = -1-3t \\ y = 3-2t \\ z = -2+4t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overline{AB} = (-2, 2, -11)$.

$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 2+2t \\ z = 4-11t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-11}$$

c) Un vector director es $\vec{u} \times \vec{v} = (4, 5, 2)$.

$$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 4+5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{2}{5}\overline{AB} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{3}{5}(1, 2, -3) + \frac{2}{5}(-4, 12, 2) \Rightarrow P(-1, 6, -1)$$

5. a) $A(0, 1, 3), \vec{u} = (1, 2, -1) \times (1, 1, 1) = (3, -2, -1)$

b) $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$

c) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

6. a) $\begin{cases} x = 4+5\mu \\ y = -2\lambda - \mu \\ z = -1+3\lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & x-4 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + 15y + 10z + 14 = 0$$

b) $\pi: (B; \overline{BA}, \overline{BC})$, donde $\overline{BA} = (3, -2, 3)$ y $\overline{BC} = (1, 1, 3)$

$$\begin{cases} x = 3\lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = -2+3\lambda + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x - 6y + 5z + 10 = 0$$

c) $\vec{u} = (2, 0, -1), B(0, 1, -3) \in r, \overline{AB} = (3, -3, -3)$

$$\pi(A; \vec{u}, \overline{AB}): \begin{cases} x = -3+2\lambda + 3\mu \\ y = 4-3\mu \\ z = -\lambda - 3\mu \end{cases}$$

$$\pi: x - y + 2z + 7 = 0$$

7. a) $\overline{AB} = (-2, 1, -2), \overline{AC} = (2, -1, 2)$

Como tienen igual dirección, los tres puntos están alineados.

b) $\overline{AB} = (1, -2, 3), \overline{AC} = (-1, 2, -2)$

Como tienen distinta dirección, los tres puntos no están alineados y forman un triángulo.

8. El plano simétrico será paralelo al plano dado y pasará por un punto simétrico de un punto cualquiera del plano dado, por ejemplo: $A(1, 0, -2) \in \pi$

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow A'(-5, 2, 2)$$

$$\pi': x - 11y + 2z + D = 0 \Rightarrow -5 - 22 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = 23 \Rightarrow \pi': x - 11y + 2z + 23 = 0$$

9. $\overline{AB} = (1, 3, 1), \overline{AC} = (2, 6-m, 2)$. Para que los tres puntos estén alineados:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$$

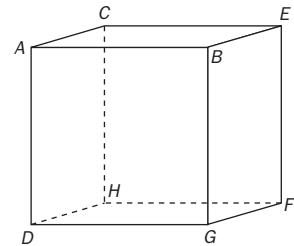
10. a) $\overline{AB} \sim \overline{CE} \Rightarrow (3, 0, 1) = (x-3, y-1, z+3) \Rightarrow E(6, 1, -2)$

Análogamente se obtienen:

$$G(4, 10, 4)$$

$$F(5, 11, 1)$$

$$H(2, 11, 0)$$



b) $V = \left| [\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}] \right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 110 \text{ u}^3$

c) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0, \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0, \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$

11. $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1)$

Si $a = 0$, $\pi_2 \equiv \pi_3$ y π_1 los corta.

Si $a = \pm 1$, tienen una recta en común y no son paralelos ni coincidentes entre sí.

Si $a \neq 0, a \neq \pm 1$, tienen un punto en común que es el origen de coordenadas.

Soluciones propuesta B

1. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 3) + (5, 3, -1) = (4, 5, 2) \Rightarrow Q(4, 5, 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overrightarrow{RS} = (-2, 8, -1) - (-1, 3, -2) = (-1, 5, 1) \Rightarrow R(-1, 5, 1)$

2.
$$\begin{cases} x_M = -6 = \frac{x_A + 10}{2} \\ y_M = 5 = \frac{y_A - 7}{2} \\ z_M = 1 = \frac{z_A + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-22, 17, 2)$$

3. a)
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 + t \Rightarrow \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{0} \\ z = -2 \end{cases}$$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$.

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + 2t \Rightarrow \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0} \\ z = -1 \end{cases}$$

c) Un vector director es $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 3t \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{1} \\ z = t \end{cases}$$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow$

$$\vec{p} = \frac{3}{4}(-3, 4, 4) + \frac{1}{4}(1, 12, 0) = (-2, 6, 3)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = (-1, 8, 2)$$

$$\vec{r} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = (0, 10, 1)$$

Por tanto: $P(-2, 6, 3)$, $Q(-1, 8, 2)$, $R(0, 10, 1)$

5. a) $A(0, -3, -6)$, $\vec{u} = (2, -3, 1) \times (1, 0, -1) \sim (3, 3, 3)$

b)
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -6 + \lambda \end{cases}$$

c) $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+6}{1}$

6. a)
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + \mu \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 0 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ z = -2 + 2\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$$

b) $\pi: (A; \vec{u}, \vec{v})$, donde $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, 4)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 4)$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x+1 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+1=0$$

c) El plano pedido es de la forma: $x - 2y - 3z + D = 0$, y como debe pasar por A, $-11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow x - 2y - 3z + 11 = 0$

7. La recta r pasa por $A(1, 2, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2, 1, -1)$. El plano pedido es el determinado por $\pi: (A; \vec{u}, \overrightarrow{AP})$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

8. a) $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow A'(-6, 1, -3)$

b) La recta será paralela a r y pasará por el punto simétrico de $B(1, 0, -2)$.

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow B'(-5, 2, 2)$$

$$r': \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

9. Se traslada el cubo según el vector $(-1, -1, -1)$, de modo que su vértice es ahora $A'(0, 0, 0)$ y su centro es $C'(1, 1, 1)$, mientras que su volumen no ha variado.

Hay infinitos cubos con vértice A' y centro C' , pero todos tienen el mismo volumen. Se toma, por tanto, el cubo con las caras paralelas a los planos coordenados. Tres aristas del cubo quedan sobre los ejes coordenados.

La proyección del centro $C'(1, 1, 1)$ sobre cada uno de los ejes da los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, que son los puntos medios de las aristas del cubo. Por tanto, los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$ son vértices del cubo, luego la arista del cubo mide 2 unidades.

El volumen del cubo es $V = 2^3 = 8 \text{ u}^3$.

10.
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13(a-1) \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(b-3)$$

Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 1$ y $b \neq 3$, los planos se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas.

Si $a = 1$ y $b = 3$, tienen una recta en común.