9 Continuidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Estudiar la continuidad de una función en un punto.	**1.** Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ si $x \neq 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(3)$ para que la función sea continua en ese punto? ¿Quedaría algún otro punto de discontinuidad? ¿De qué tipo?
B. Saber hallar el dominio de continuidad de una función y su relación con el dominio de la misma.	**2.** Determina los dominios de definición y de continuidad de las siguientes funciones: a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$ c) $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$
C. Hallar los valores de ciertos parámetros en las funciones definidas a trozos para que sean continuas en un punto concreto o en un intervalo.	**3.** Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo **R**. Represéntala. **4.** ¿Para qué valores de k es continua en **R** la función $f(x) = \begin{cases} 3k^2x - 5k^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2kx + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$?
D. Clasificar las discontinuidades de una función discontinua en varios puntos y efectuar una representación aproximada de la función en un entorno de esos puntos.	**5.** Estudia la continuidad de la función f, clasifica los puntos de discontinuidad, si hubiera alguna evitable indica cómo se eliminaría y represéntala gráficamente. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{3+x}{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \\ k + \ln x & \text{si } x \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$
E. Analizar si una función cumple, o no, las hipótesis del teorema de Bolzano.	**6.** La función $f(x) = (\ln x)^2 - 6 \ln x + 5$ es continua en todo su dominio $(0, +\infty)$. Determina dos intervalos disjuntos $[a, b]$ y $[b, c]$ en los que la gráfica de la función corte al menos una vez al eje de abscisas. Justifica la respuesta. ¿Podrías en este caso hallar todos los puntos de corte de la función con el eje X? **7.** ¿Es aplicable el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - 2x - 7}$ en $[2, 4]$? Justifica la respuesta. ¿Se puede asegurar que la función corta al eje de abscisas en algún punto o, por el contrario, que no lo corta en ningún punto?
F. Determinar intervalos de la amplitud deseada en los que se encuentren las soluciones de una ecuación.	**8.** Justifica que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$. Calcula con un error menor que 0,1 la solución de la ecuación anterior.
G. Determinar si una función definida en un intervalo está acotada y en caso afirmativo encontrar el supremo y el ínfimo.	**9.** Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{5e^x}{1 + e^x}$ está acotada. Indica el supremo y el ínfimo. ¿Tiene un máximo y un mínimo absoluto dicha función? ¿Por qué?
H. Aplicar e interpretar los teoremas de los valores intermedios y de Weierstrass.	**10.** Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \dfrac{1 + e^{2x}}{1 + e^x}$, $\forall x \in [-3, 1]$.

Soluciones

1. Calculamos $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(2x+1)(x-3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{4}{7}$.

La función sería continua en $x = 3 \Leftrightarrow f(3) = \dfrac{4}{7}$.

En $x = -\dfrac{1}{2}$ la función presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = -\infty \qquad \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = +\infty$$

2. a) $D = \mathbb{R}$ c) $D = [3, +\infty)$

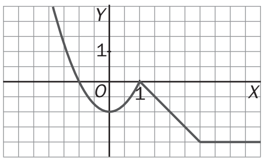
b) $D = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ d) $D = [2, 3)$

Las cuatro funciones son continuas en sus respectivos dominios.

3. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax + b) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(ax + b) = 3a + b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(-2) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a + b = -2$$

De donde se obtiene $a = -1$ y $b = 1$.



4. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(3k^2x - 5k^2) = k^2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k \end{array}\right\} \Rightarrow k^2 = 5 - 4k$$

Se obtienen dos valores: $k = 1$ y $k = -5$.

5. Se estudian los puntos en donde cambia la definición de la función.

$$x = -1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (e^{-x} - e) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3+x}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

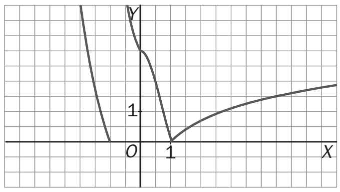
$\Rightarrow$ Discontinuidad inevitable de salto infinito.

$$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3+x}{x+1} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Discontinuidad evitable. Se elimina tomando $f(0) = 3$.

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{3}\right)} (k + \ln x) = k + \ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sería continua si $k = -\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$



6. Como $f(1) = 5 > 0$ y $f(3) \approx -0{,}38 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_1 \in (1, 3)\,/\, f(x_1) = 0$

Como $f(3) \approx -0{,}38 < 0$ y $f(e^6) = 5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_2 \in (3, e^6)\,/\, f(x_2) = 0$

En este caso x_1 y x_2 se pueden determinar de manera exacta, pues resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ se obtiene:

$$\ln x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \Rightarrow x_1 = e \\ 5 \Rightarrow x_2 = e^5 \end{cases}$$

7. La función $g(x) = x^3 + 2x - 7$ es continua en $[2, 4]$.

Como $g(2) = -3 < 0$ y $g(4) = 49 > 0$, existe un valor en el intervalo $(2, 4)$ que anula g, es decir, la función del denominador de f y, por tanto, la función f no es continua en $[2, 4]$ y no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

8. Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 5$ que es continua en $[1, 2]$ y, además, $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 5 > 0$.

Por el teorema de Bolzano se sabe que $\exists c \in (1, 2)\,/$ $f(c) = 0$ luego c es solución de la ecuación dada.

Si se calculan los valores $f(1{,}2)$, $f(1{,}4)$, $f(1{,}6)$, $f(1{,}8)$ se puede determinar el intervalo en el que se encuentra la solución:

$f(1{,}4) = -0{,}856 < 0$; $f(1{,}6) = 0{,}696 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \in (1{,}4;\ 1{,}6)$

9. La función es continua y positiva en $\mathbb{R}$ y, además, como su derivada $f'(x) = \dfrac{5e^x}{(1 + e^x)^2} > 0\ \forall x$, f es monótona creciente.

Se calculan $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5e^x}{1 + e^x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5e^x}{1 + e^x} = 5$, por lo que el ínfimo es 0 y el supremo 5 y no son alcanzables, es decir, no hay ni máximo ni mínimo absolutos.

10. La derivada $f'(x) = \dfrac{e^x(e^{2x} + 2e^x - 1)}{(1 + e^x)^2}$ solo se anula para $x = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right) \approx -0{,}9$.

Se hallan $f(3) \approx 0{,}9549$, $f\left(\ln\left(-1 + \sqrt{2}\right)\right) \approx 0{,}82$ y $f(1) \approx 2{,}25$.

Luego en el intervalo $[-3, 1]$, f alcanza el mínimo en $x = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right)$ y el máximo en $x = 1$.