11 Funciones derivables

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Obtener correctamente las derivadas laterales de una función en un punto, en especial en las funciones con valor absoluto o definidas a trozos.	**1.** Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & \text{si } x\leqslant 2 \\ x^2+3 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en $x=2$. **2.** Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\left\lvert \lvert x^2-4\rvert+3x \right\rvert$ en los siguientes puntos: a) $x=-2$ b) $x=-1$ c) $x=2$ d) $x=-4$ e) $x=0$
B. Determinar el valor de ciertos parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.	**3.** Determina el valor de los parámetros a y b para que sea continua y derivable en todo R la función $f(x)=\begin{cases} ax^3-bx^2 & \text{si } x<1 \\ 1-2ax & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$.
C. Conocer los teoremas de Rolle y del valor medio y aplicarlos a ejemplos concretos de funciones.	**4.** Halla los valores de a y de b para que la función $f(x)=\begin{cases} bx-x^2 & \text{si } x\leqslant 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x>2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, 4]$ y determina el valor que verifica la tesis del teorema. **5.** Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si } x<-2 \\ x^3+m & \text{si } x\geqslant -2 \end{cases}$ a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$. b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.
D. Resolver límites de funciones en los que aparezca cualquiera de las indeterminaciones.	**6.** Calcula: a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\,\text{sen}\,x}{1-4\cos^2 x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{6x-2}{x^2-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\text{tg}(1-x)}\right)$
E. Determinar los extremos relativos de una función y los intervalos de monotonía. **F.** Determinar los puntos de inflexión de una función y los intervalos de curvatura.	**7.** Determina los extremos relativos, los intervalos de monotonía, la curvatura y los puntos de inflexión de las funciones: a) $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)$
G. Resolver problemas de optimización relacionados con la geometría.	**8.** Se tiene un triángulo rectángulo de hipotenusa 12 cm que, al girar alrededor de uno de sus catetos, genera un cono. Determina las dimensiones del triángulo que genera el cono de volumen máximo y el valor de dicho volumen. **9.** Se quiere construir un depósito de 8 m^3 de capacidad con forma de prisma de base cuadrada y sin tapa. El material que se utiliza para la base cuesta 15 € el m^2 mientras que el que se utiliza para las paredes cuesta 12 € el m^2. Determina las dimensiones del depósito que hay que hacer para que su coste de construcción sea mínimo.
H. Plantear y resolver problemas de optimización relacionados con las ciencias experimentales y sociales.	**10.** El valor de una cartera de acciones a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles de euros) viene dado por la expresión (x en años): $F(x)=(x-2)^2\cdot(1-2x)+252x+116$ con $0\leqslant x\leqslant 10$ a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció. b) Si la cartera se vende a los 10 años, ¿cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto se deja de ganar por no haberlo retirado en el momento óptimo?

1. $f'(2^-) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(2+h)+2-12}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h} = 5$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2+3-12}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+4h-5}{h}$. No es derivable por la derecha.

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x<-4 \\ -x^2-3x+4 & \text{si } -4\leqslant x<-2 \\ x^2-3x-4 & \text{si } -2\leqslant x<-1 \\ -x^2+3x+4 & \text{si } -1\leqslant x<2 \\ x^2+3x-4 & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$ $\quad f'(x)=\begin{cases} 2x+3 \\ -2x-3 \\ 2x-3 \\ -2x+3 \\ 2x+3 \end{cases}$

Al ser continua f en los puntos pedidos, las derivadas laterales se pueden calcular a partir de la función f' que, en principio, no está definida para $x = -4$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 2$.

a) $f'(-2^-)=1$, $f'(-2^+)=-7$ d) $f'(-4^-)=-5$, $f'(-4^+)=5$

b) $f'(-1^-)=-5$, $f'(-1^+)=5$ e) $f'(0) = 3$

c) $f'(2^-) = -1$, $f'(2^+) = 7$

3. Para $x \neq 1$, f es continua y derivable, ya que está definida por polinomios. Para $x = 1$ resulta:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax^3 - bx^2) = a - b$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1 - 2ax) = 1 - 2a$

Y de aquí se deduce: $a - b = 1 - 2a \Rightarrow \boxed{b = 3a - 1}$.

Con esta condición, f es continua en $x = 1$ y, por tanto, sus derivadas laterales en ese punto se pueden calcular como los límites de la función f'.

$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2-2bx & \text{si } x<1 \\ -2a & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=3a-2b \\ f(1^+)=-2a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a - 2b = -2a \Rightarrow \boxed{2b = 5a}$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones recuadradas se llega a la solución buscada: $a = 2$, $b = 5$.

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2b - 4 = 2 \Rightarrow b = 3$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b - 4 = -1 \Rightarrow b = 3$

$f(a) = f(4) \Rightarrow 3a - a^2 = 1,\ a < 2 \Rightarrow a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$

El teorema afirma que $\exists c \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 4\right]$ que verifica $f'(c) = 0$ y como $-\dfrac{4}{x^2} \neq 0\ \forall x$, la derivada tiene que anularse para algún valor del intervalo

$\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]$. $\quad 3 - 2c = 0 \Rightarrow c = \dfrac{3}{2} \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2\right]$

5. a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m + 2n = 12$

$f'(-2^-)=f'(-2^+) \Rightarrow -4+n=12 \Rightarrow n=16 \Rightarrow m=-20$

b) $\exists c \in (-4, 2) / \dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)} = \dfrac{-12-(-48)}{6} = 6 = f'(c)$

$2c + 16 = 6 \Rightarrow c = -5 \notin (-4, -2)$

$3c^2 = 6 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \in (-2, 2)$

6. a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\operatorname{sen} x}{1-4\cos^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{-2\cos x}{8\operatorname{sen} x\cos x}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{6x-2}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\operatorname{tg}(1-x)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}}{-\left(1+\operatorname{tg}^2(1-x)\right)} = -3$

7. a) $D(f) = \mathrm{R} - \{0\}$; $f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^4}$ solo se anula para $x = \pm 1$. Como $f''(x) = \dfrac{12}{x^5} \Rightarrow f''(-1) < 0$, $f''(1) > 0$.

Máximo relativo en el punto $(-1, -4)$ y mínimo en $(1, 4)$. f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

f cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba en $(0, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

b) $D(k) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; $k'(x) = \dfrac{-4}{1-4x^2}$; $k''(x) = \dfrac{-32x}{\left(1-4x^2\right)^2}$

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Es siempre decreciente en su dominio.

Como $k''(x) > 0\ \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, en este intervalo es cóncava hacia arriba, y es cóncava hacia abajo si $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, ya que $k''(x) < 0$ en este intervalo.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

8. Llamando x a la altura del cono, su volumen es:

$V = \dfrac{1}{3}\pi x\left(144 - x^2\right)$ con dominio $(0, 12)$.

$V' = \dfrac{1}{3}\pi\left(144 - 3x^2\right)$ solo se anula para $x = \sqrt{48}$. Y como $V(0) = 0$, $V(12) = 0$ y $V\left(\sqrt{48}\right) = 32\pi\sqrt{48}$ cm^3, resulta que este es el volumen máximo y las dimensiones del triángulo son: $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}$, 12 cm.

9. Llamando x a la arista de la base, la altura es $\dfrac{8}{x^2}$ y el precio $P(x) = 15x^2 + 12\left(4x\cdot\dfrac{8}{x^2}\right) = 15x^2 + \dfrac{384}{x}$ con dominio $(0, +\infty)$. $P'(x) = 30x - \dfrac{384}{x^2}$ solo se anula para $x = \sqrt[3]{\dfrac{64}{5}}$ que corresponde al mínimo de la función. Las dimensiones son $x \approx 2{,}34$ m, $h \approx 1{,}46$ m

10. $F'(x) = -6(x + 5)(x - 8)$ que solo se anula para $x = 8$.

a) De 0 a 8 creció y de 8 a 10 decreció.

b) El mejor momento hubiera sido a los 8 años con un valor de $F(8) = 1\,592\,000$ €. Como $F(10) = 1\,420\,000$ €, ha dejado de ganar 172 000 €.