

12 Representación de funciones

Propuesta A

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x^2}$

b) $g(x) = \ln(\sin(2x))$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x$

b) $g(x) = \frac{2-e^x}{2+e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = 4 \cos 2x + \sin 3x$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-9}$

b) $g(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{x \cos x}$

c) $h(x) = \ln(x^2-1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$

b) $g(x) = \frac{4+e^x}{1-e^x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x) = \frac{1}{3}(x^3-3x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

7. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y represéntalas.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

b) $g(x) = 3(x-1) - (x-1)^3$

8. Representa las siguientes funciones racionales e irracionales tras realizar el estudio completo de las mismas.

a) $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

9. Haz un estudio completo y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x+2)e^x$

b) $g(x) = \ln(x^2+x-2)$

10. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones trigonométricas y represéntalas.

a) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

b) $g(x) = \sin x \operatorname{tg} x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$

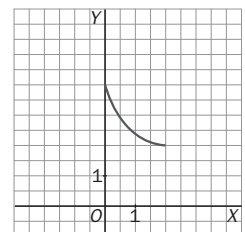
c) $2 + f(x)$

e) $f^{-1}(x)$

b) $2f(x)$

d) $f(x+2)$

f) $f\left(\frac{x}{2}\right)$



Propuesta B

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x) = 2 - \ln(x-1)$

b) $g(x) = \frac{x+2}{e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

b) $g(x) = \left(\frac{x}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right) \right)$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln|x^2-5|}{x}$

b) $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-1}$

c) $h(x) = \text{tg}(x^2+1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$

b) $g(x) = \sqrt{x^2-x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x) = \frac{1}{4}(4x^2 - x^4)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y compara el signo de $f'(x)$ y $f''(x)$ con el crecimiento y la curvatura de $f(x)$.

7. Representa las siguientes funciones polinómicas tras realizar un estudio completo de las mismas.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $g(x) = (x+1) - (x+1)^3$

8. Haz el estudio completo y representa las siguientes funciones racionales e irracionales.

a) $f(x) = \frac{x-4}{2x+4}$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

c) $h(x) = \sqrt{9-x^2}$

9. Realiza el estudio de las funciones siguientes y represéntalas.

a) $f(x) = (x^2-1)e^x$

b) $g(x) = \ln(4-x^2)$

10. Representa las siguientes funciones trigonométricas tras realizar su estudio completo.

a) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$

b) $g(x) = \sin^2 x \cos x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$

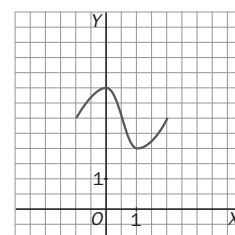
c) $f(x) - 3$

e) $f^{-1}(x)$

b) $\frac{f(x)}{2}$

d) $f(x+3)$

f) $f(2x)$



Soluciones propuesta A

1. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$. Es continua en todo D .

$$f'(x) = \frac{2(3-x)^2}{x^3(x+3)^2} \Rightarrow \text{puntos singulares y}$$

$$\text{críticos: } x = \pm\sqrt{3}$$

b) $D(f) = \{x \in \mathbf{R} / \sin 2x > 0\} = \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

Continua en $D(f)$. $g'(x) = 2 \cot g(2x) \Rightarrow$ pto.

singulares y críticos: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbf{Z}$

2. a) Eje X: $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right), k \in \mathbf{Z}$. Eje Y: $(0, 1)$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$$

b) Eje X: $(\ln 2, 0)$. Eje Y: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

$$g(x) > 0 \text{ si } x \in (2, +\infty)$$

3. a) $f(x) = \sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\text{Período } T = \frac{2\pi}{3}$$

b) $g(x) = 4 \cos 2x + \sin 3x = g_1(x) + g_2(x)$

$$T_1 = \pi, T_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$$

4. a) $f(-x) = \frac{-x^3 + 2x^2}{x^2 - 9} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ Ni par ni impar

b) $g(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{-x \cos(-x)} = -g(x) \Rightarrow$ Impar

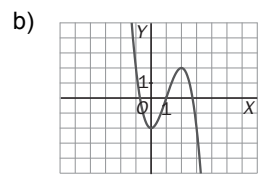
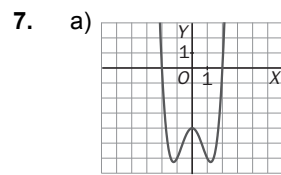
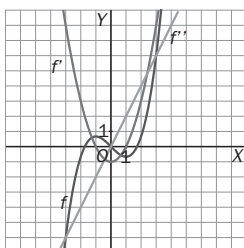
c) $h(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2} = 2x - \frac{2x}{x^2+1}$. Solo tiene la asíntota oblicua $y = 2x$.

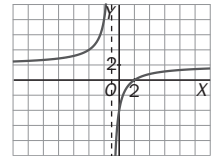
b) Vertical en $x = 0$, al ser $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \pm\infty$.

$$\text{Horizontales: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4+e^x}{1-e^x} = 4 \Rightarrow y = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+e^x}{1-e^x} = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

6.



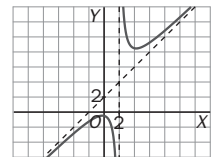
8. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$
Cortes: $(2, 0), (0, -4)$
AV: $x = -1$, AH: $y = 2$



b) $D(g) = \mathbf{R} - \{2\}$

Cortes: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

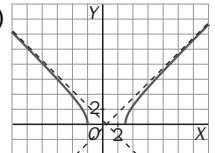
AV: $x = 2$, AO: $y = x+2$



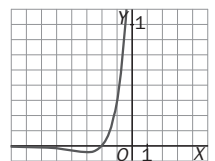
c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Cortes: $(-2, 0), (3, 0)$

AO: $y = x - \frac{1}{2}$, si $x \rightarrow +\infty$
 $y = \frac{1}{2} - x$, si $x \rightarrow -\infty$



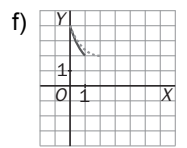
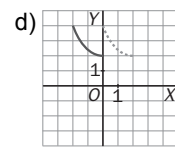
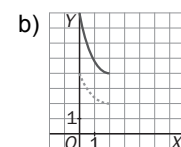
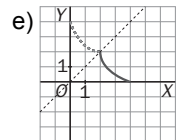
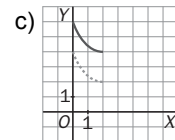
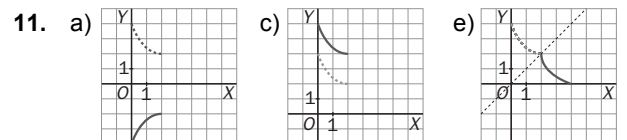
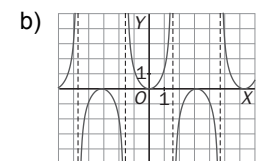
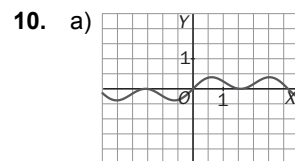
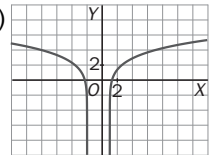
9. a) $D(f) = \mathbf{R}$
Cortes: $(-2, 0), (0, 2)$
AH: $y = 0$, si $x \rightarrow -\infty$



b) $D(g) = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Cortes: no hay

AV: $x = -2, x = 1$



Soluciones propuesta B

1. a) $D(f) = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$. Continua en $D(f) - \{3\}$. $f'(x) = \frac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

b) $D(g) = [3, +\infty)$. Continua en $D(g) - \{3\}$.

$g'(x) = \frac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

2. a) Eje X: $(1+e^2, 0)$. Eje Y: no hay.

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 1+e^2)$$

b) Eje X: $(-2, 0)$. Eje Y: $(0, 2)$

$$g(x) > 0 \text{ si } x \in (2, +\infty)$$

3. a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x = f_1(x) + f_2(x)$
 $T_1 = \pi, T_2 = 2\pi \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$

b) $T = 2$ porque

$$\begin{aligned} h(x+2) &= \left(\frac{x+2}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x+2}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \text{Ent}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right) = h(x) \end{aligned}$$

4. a) $f(-x) = \frac{\ln|x^2-5|}{-x} = -f(x) \Rightarrow$ Impar

$$\text{b) } h(-x) = \frac{-x^3-2x}{x^2-1} = -h(x) \Rightarrow \text{Impar}$$

$$\text{c) } h(-x) = \text{tg}((-x)^2+1) = h(x) \Rightarrow \text{Par}$$

5. a) Vertical en $x = 0$, ya que

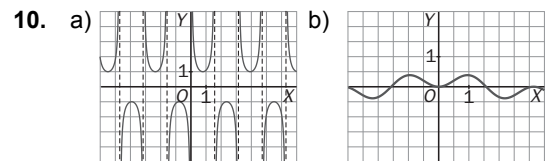
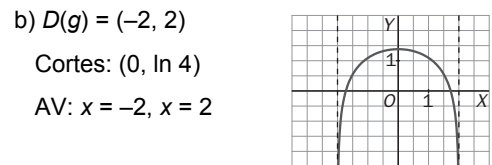
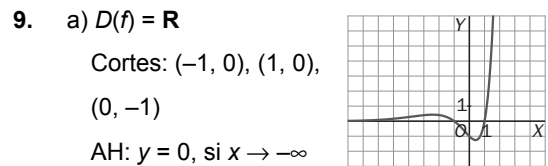
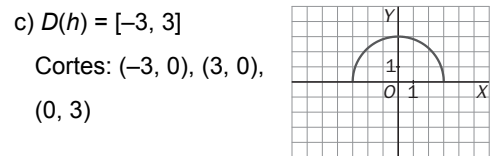
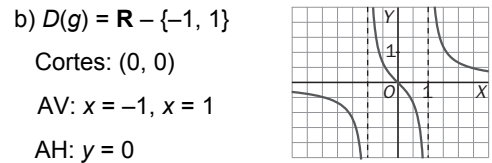
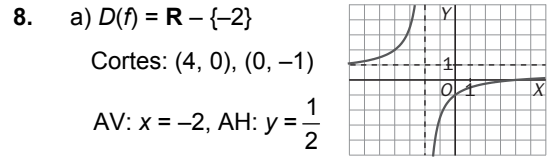
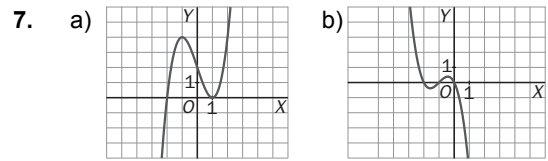
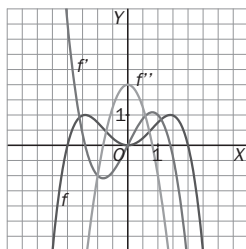
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{2}{x} - 3 \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2-3x \ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{b) } m_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = 1, m_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = -1$$

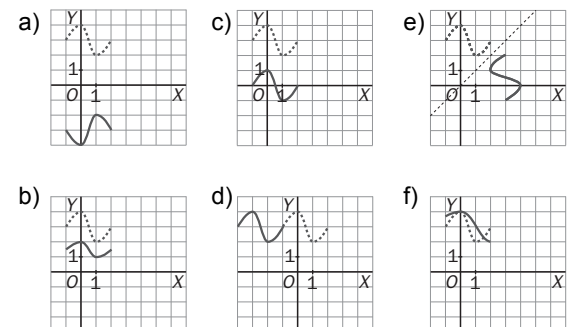
$$n_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2-x} \mp x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\mp x}{\sqrt{x^2-x} \mp x} = \mp \frac{1}{2}$$

$$\text{Asíntotas oblicuas: } \begin{cases} y = x - \frac{1}{2} & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ y = -x + \frac{1}{2} & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

6.



11.



En el apartado e se representa la correspondencia inversa de f al no existir f^{-1} .